Problèmes ouverts et/ou à modéliser au lycée

Qu'est-ce que c'est ?

qu'est ce que la modélisation ?

(source: LEMA PROJECT **Learning** and **Education** in and through **Modelling** and **Applications)**

formidable ressource pour modéliser (LEMA : disponible en format word (donc modifiable) sur le site)

Table des matières

Seconde

programme seconde

a) Algèbre - analyse

Eduscol, document ressources fonctions

Quels sont les objectifs à atteindre ?

Comme dans toutes les parties du programme, les paragraphes qui précèdent les tableaux précisant les contenus et les capacités attendues, fixent de façon nette les objectifs à atteindre et les déclinent en termes de **nature des problèmes que les élèves doivent savoir résoudre, précisant également le degré d'autonomie attendu.**

Ces objectifs sont ambitieux, le degré d'autonomie que les élèves doivent montrer pouvant être maximal : autonomie du choix de la démarche, de la nature du traitement à apporter, de la modélisation à mettre en oeuvre.

Construire chez tout élève cette autonomie nécessite une formation adaptée incluant une confrontation fréquente à des problèmes posés sous une forme ouverte.

Problème 1 (source: document ressources fonctions seconde)

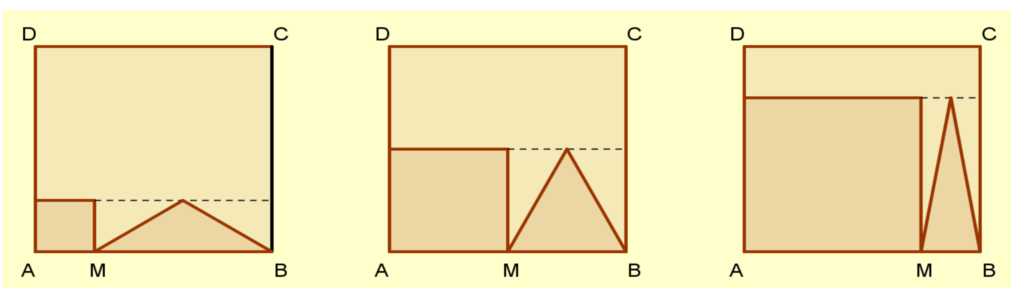
Le carré ABCD a un côté de longueur 8 cm.

M est un point du segment [AB].

On dessine dans le carré ABCD :

- Un carré de côté [AM]
- Un triangle isocèle de base [MB] et dont la hauteur a même mesure que le côté [AM] du carré.

Trois dessins sont proposés pour trois positions différentes du point M.



à partir de cette situation, plusieurs problèmes:

- Problème 1: Dans quelle situation a-t-on l'aire du triangle la plus grande ?
- Problème 2: Dans quelle situation l'aire du carré est égale à celle du triangle ?
- Problème 3: Dans quelle situation l'aire du motif est elle égale à la moitié de celle de ABCD ?
- Problème 4: Dans quelle situation a-t-on l'aire du triangle supérieure à la moitié de celle du carré ?
- Problème 5: Comment évolue l'aire du motif en fonction de AM ? en fonction de MB ?

...etc Il est possible d'imaginer comme cela un certain nombre de problème. Exploitables également en 1ère S et ES.

Problème 2

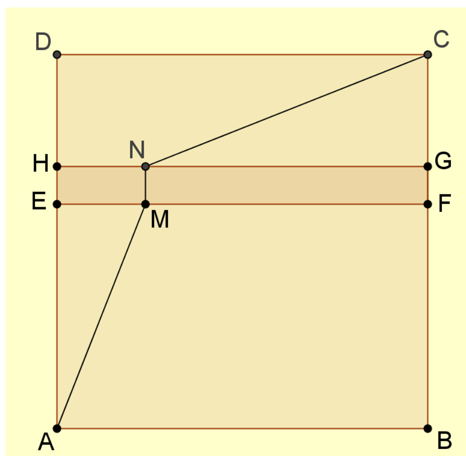
La trajectoire d'une balle dans l'air est donnée par : $f(x)=-5x^2+12x+9$ où x est le temps écoulé depuis le lancer, exprimé en secondes, et $f(x)$ la hauteur de l'objet à l'instant x, exprimé en mètres.

Sans questions c'est encore mieux !!

Problème 3

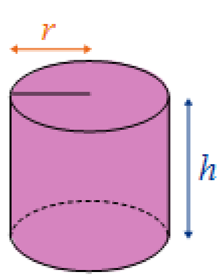
ABCD est un parc carré de côté 10 mètres.
Il passe un cours d'eau de largeur 1 mètre à travers ce parc, matérialisé par le rectangle EFGH avec AE = 6 mètres.

Où franchir le pont pour que le trajet de A à C soit le plus court possible ?



Problème 4

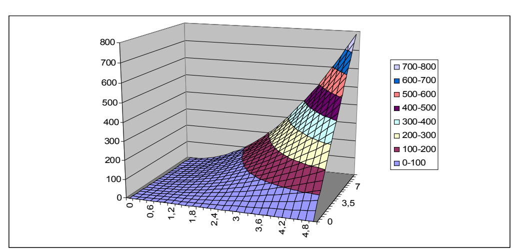
On considère un cylindre de hauteur *h* et dont la base a pour rayon *r* (en dm). Ce cylindre doit faire 5 gallons. Quelles sont les possibilités ?



Problème 5

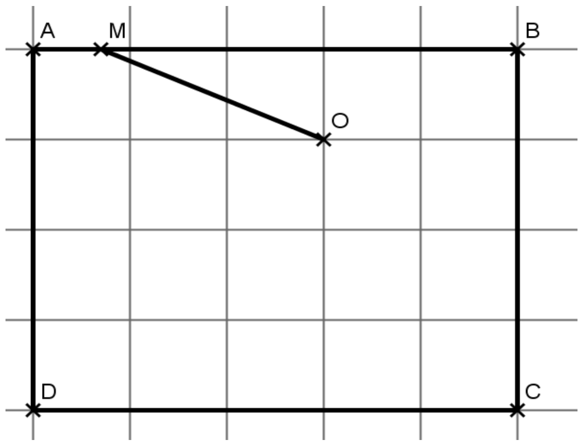
Un cylindre est formé d'une feuille de papier de longueur *a* et *b* telles que $a < b$.
En roulant cette feuille, on peut obtenir deux cylindres.
Les volumes de ces cylindres peuvent-ils être égaux ?

on peut aller vers :

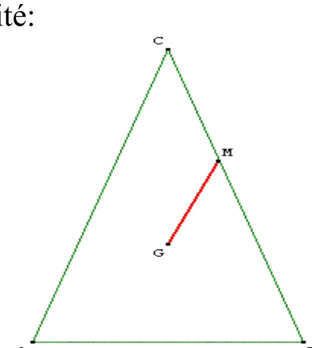


Problème 6

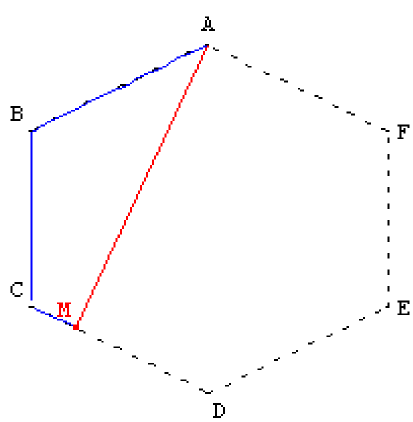
Un gardien est charge de la surveillance d'une propriété rectangulaire de 5hm sur 4hm. Il dispose d'un talkie-walkie pour communiquer avec un autre gardien situe a l'intérieur de la propriété. La qualité de la communication dépend de la distance entre les deux gardiens.
Le schéma ci dessous illustre cette situation : On note M la position du premier gardien qui se déplace a partir du point A en direction du point B jusqu'à compléter le tour de la propriété.
Le point O symbolise le deuxième gardien. Les dimensions sont indiquées sur le dessin.



Décrire l'évolution de la distance OM selon la distance parcourue par le gardien.
variante avec un triangle et son centre de gravité:

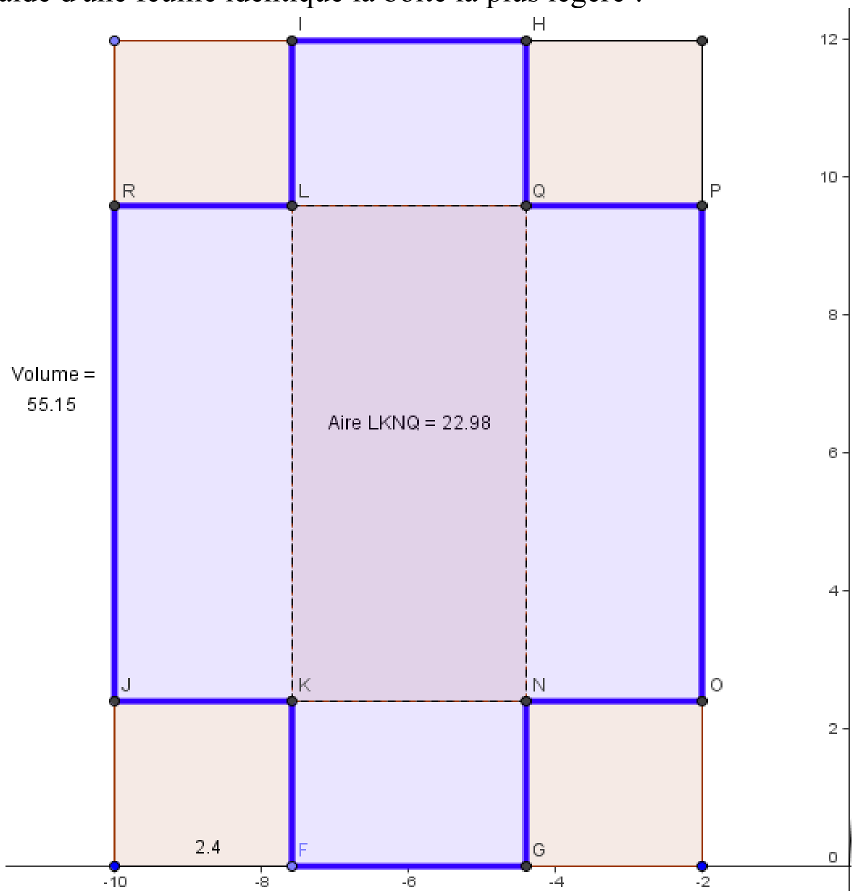


ou dans un hexagone:



Problème 7

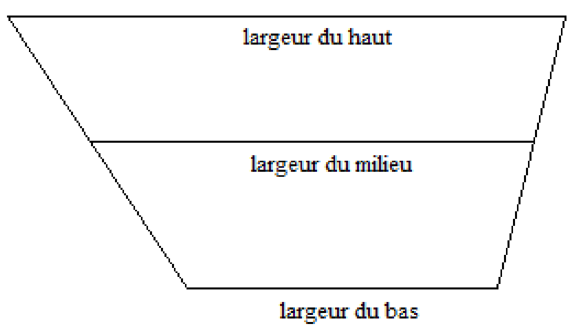
Voici, en gras, le patron d'une boite sans couvercle découpé dans une feuille cartonnée.
Objectif 1: Construire à l'aide d'une feuille identique la boite ayant le plus grand volume !
Objectif 2: Construire à l'aide d'une feuille identique la boite la plus légère !



Problème 8

En Mésopotamie, les champs ont la forme de trapèzes.

Un arpenteur doit partager équitablement un champ entre deux frères : le champ est un trapèze de bases 7 et 17. Les parts sont deux trapèzes. Trouver la largeur du milieu .



Problème 9

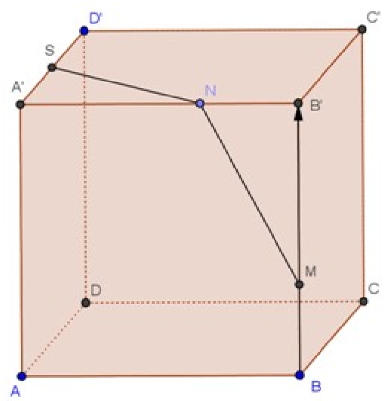
ABC est un triangle ; comment choisir P sur $[AB]$, Q sur $[AC]$ et R sur $[CB]$ pour que le périmètre de PQR soit minimum ?

Problème 10

ABC est un triangle donné. Soit A', distinct de A, B et C ; L et M sont les projections orthogonales de A sur $(A'B)$ et $(A'C)$. Où placer A' pour que la longueur LM soit maximale ?

Problème 11

- Une fourmi se déplace le long des arêtes d'un cube. Si elle se rend d'un sommet au sommet opposé sans passer deux fois par le même point, quelle est la longueur maximale de son trajet ?



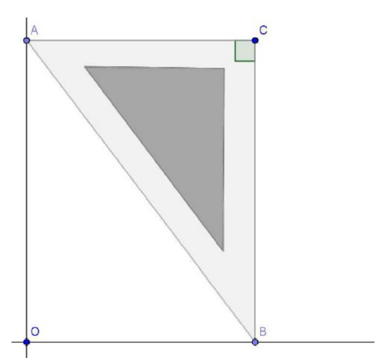
- Une fourmi (M) cherche à rejoindre un morceau de sucre (S) par le chemin le plus court. (la fourmis trouve toujours le chemin le plus court ! Et vous ?)

Problème 12

Quel est le nombre de solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = \dfrac{x}{200}$?

Problème 13

Une équerre ABC est placée de telle sorte que le point A est situé sur
l'axe des ordonnées et le point B sur celui des abscisses. On déplace
l'équerre en faisant glisser A et B sur les axes.
Comment se déplace le point C ?



Problème 14

Dans un repère orthonormé, on considère le point P (3;2).

Soit Q un point quelconque de l'axe des abscisses. Soit R l'intersection de la droite (PQ) avec l'axe des ordonnées.

On note x l'abscisse de Q et y l'ordonnée de P.

Étudier la fonction $f : x \rightarrow y$

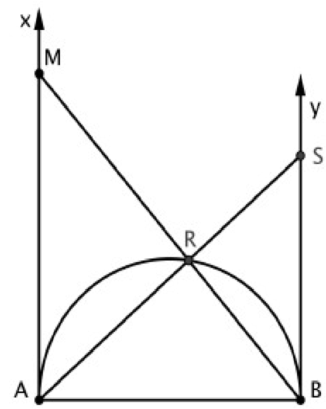
Problème 15

On considère un demi cercle C de diamètre [AB], les demi-droite [Ax) et [By) lui sont tangentes.

M $\in$ [Ax) $R = C \cap (MB)$ S = (AR) $\cap$ [By)

x = AM y = BS

Étudier la fonction $f : x \rightarrow y$



Problème 16

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$ par : $g(x) = \frac{1}{2-x} + \frac{4}{2+x}$

trouver une fonction paire et une fonction impaire dont g est la somme

Problème 17 (académie Aix-Marseille)

Un stade est constitué d'une pelouse centrale rectangulaire ABCD, complétée par deux demi-disques de diamètre [AD] et [BC]. Ce terrain est entouré par une piste de course à pied de longueur égale à 400 m.

Quelles doivent être les dimensions du rectangle ABCD si l'on veut que son aire soit maximale ?

Problème 18 (académie Aix-Marseille)

Pourquoi les batteries de casseroles que l'on trouve dans le commerce sont-elles toutes du même type ? Prenons par exemple la casserole de deux litres. Pourquoi a-t-elle à peu près 9 cm de haut pour un diamètre de 17 cm quelle que soit la marque achetée ?
La tôle d'une casserole coûte cher ! Pour minimiser son coût de fabrication, il faut minimiser la quantité de métal utilisée et donc l'aire de la casserole.
Comment, pour un volume V donné, trouver la casserole la plus « *économique* » ?

(Une variante du problème précédent est fournie par l'optimisation des dimensions d'une boite de maïs.
Pourquoi de maïs ? Les boites de conserve ordinaires, disons de petits pois, n'ont pas des dimensions optimisées. Mais le maïs est conservé sous vide, et requiert donc une tôle plus épaisse que les autres boites. Les industriels ont donc optimisé les dimensions pour réduire le coût.)

Problème 19

ABCD est un trapèze rectangle de grande base [AB].
Trouver un point M du segment [AB] tel que [CM] partage le trapèze ABCD en deux parties d'aires égales.

Problème 20

ABCD est un trapèze rectangle de bases [AB] et [CD] et de hauteur [AD] tel que AB = 2, AD = 7 et DC = 3.

M est un point mobile du segment [AD].

On appelle T_1 le triangle DMC ; T_2 le triangle BCM et T_3 le triangle ABM.

Partie 1

a. Trouver la position de M pour que l'aire de T_1 soit égale à $\frac{3}{2}$

b. Dans ce cas préciser la nature de T_2, justifier.

c. Y a-t-il une autre position de M pour que T_2 soit de même nature ?

Partie 2

Déterminer toutes les positions de M pour que :
a. $Aire(T_3) < Aire(T_1)$
b. $Aire(T_1) < Aire(T_2)$
c. $Aire(T_3) < Aire(T_1) < Aire(T_2)$

Partie 3

Peut-on trouver M sur [AD] pour que T_2 soit isocèle en M ?

Problème 21

Soit ABCD un trapèze rectangle en A et D tel que AB = 6 cm, AD = 4 cm et CD = 2 cm. Un point N parcourt le segment [BC] ; on construit le rectangle AMNP avec P sur [AB] et M sur [AD].
Exprimer l'aire du rectangle AMNP en fonction de AM et représenter graphiquement cette aire en fonction de AM.
Pour quelle valeur de AM cette aire est-elle maximum ?

Problème 22 Parcours à VTT

Un vététiste part de D pour arriver en A situé au milieu d'une grande prairie. Il peut emprunter un chemin carrossable [DD’] rectiligne de 6 km de long. Le point A est distant de 3 km de [DD’], se projette en H sur (DD’) ; DH = 4 km et HD'= 2 km.

Quel itinéraire doit-il choisir pour aller le plus rapidement possible de D à A dans les cas suivants ?
a) il se déplace à la même vitesse v (par exemple 15 km.h^{-1}) sur le chemin et dans la prairie ;
b) il se déplace à la vitesse v_1 sur le chemin, à la vitesse v_2 dans la prairie, et $v_1 = 2v_2$ (avec par exemple $v_2 = 10$ km.h^{-1}).

Problème 23 (source: académie Aix-Marseille)

Le laboratoire d'une aciérie étudie la dilatation d'un acier fabriqué par l'entreprise.

Les mesures effectuées donnent les résultats suivants pour une tige d'acier :

Températures en °C	0°	50°	100°	200°	400°
Longueurs en cm	50	50,03	50,06	50,12	50,24

A quelle température faut- il porter la tige pour que sa longueur soit égale à 50,15cm ?

Problème 24

Dans un laboratoire, pour étudier l'évaporation d'un liquide, le professeur Holè est chargé de mesurer chaque jour la hauteur de ce liquide dans un tube à essai.

Il commence le lundi (jour 1) et mesure une hauteur de 8,2cm. Le lendemain, la hauteur du liquide est de 7,6cm. M. Holè oublie de faire le relevé le mercredi. Il s'en rend compte le jeudi, la hauteur du liquide est alors de 6,4 cm.

Au bout de combien de jour n'y aura-t-il plus de liquide ?

Problème 25

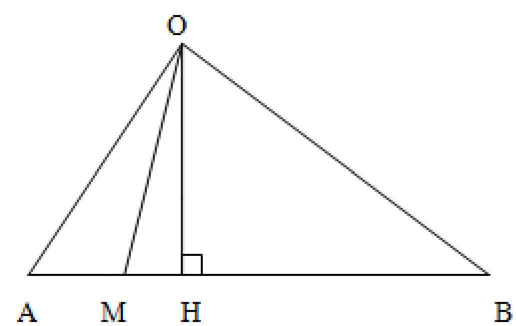
La ficelle et les deux carrés

« On coupe une ficelle de 32 cm de long en 2 morceaux avec lesquels on forme 2 carrés. Où doit-on couper la ficelle pour que la somme des aires des 2 carrés soit la plus petite possible ? »

Problème 26

Sur la figure ci-contre :

$$\begin{cases} OH = 3 \\ AB = 6 ; HB = 4 \\ M \in [AB] \end{cases}$$

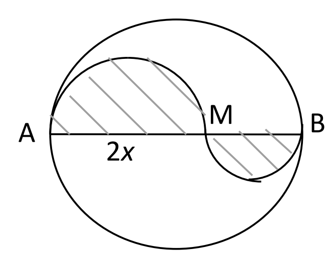


Où placer M pour que [OM] partage le triangle AOB en 2 triangles OAM et OMB de même aire ?

Où placer M pour que l'aire de OMH soit $\frac{3}{2}$?

Problème 27 Yin et Yang

Sur un diamètre [AB] d'un cercle de rayon 4 cm, on marque un point M. On désigne par $2x$, avec $0 \leqslant x \leqslant 4$, la longueur de AM.



On trace deux demi-cercles de part et d'autre de (AB), de diamètre [AM] pour l'un et [BM] pour l'autre.

Exprimer l'aire de la partie hachurée et déterminer pour quelle valeur de x cette aire est maximum.

Problème 28

Soit f *et* g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2$ et $g(x)=2x-1$
et l'écart $\Delta(x)=f(x)-g(x)$ entre ces deux nombres.
Déterminez un intervalle I tel que pour tout x de I, cet écart soit inférieur à 1% de la valeur de $f(x)$

Problème 29

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère la parabole P, représentant la fonction carré, et la droite D d'équation $y=x$.
Donner l'équation d'une droite parallèle à D n'ayant qu'un seul point d'intersection avec P

Problème 30

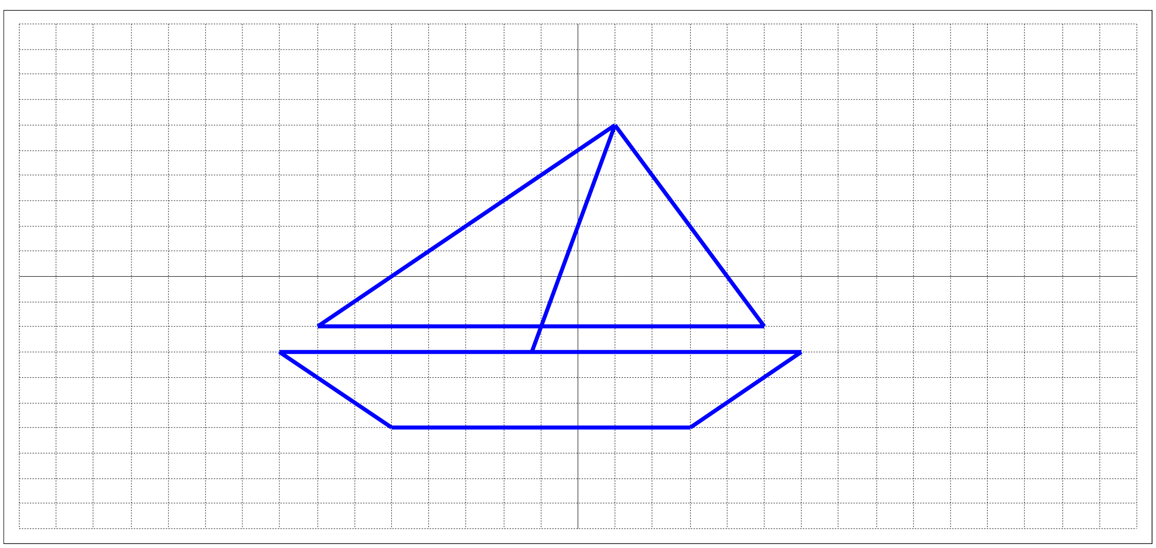
L'entreprise Eve nof, qui a fait fortune en République Lunatique en vendant des piscines Roses, Propose à M Bosséoui une piscine qui a la forme d'un parallélépipède rectangle de longueur 14 m, de largeur 3 m et de profondeur 2 m.
M Bosséoui souhaite modifier les longueurs et largeurs sans modifier le volume et la profondeur.
Quelles sont les solutions ? Si possible avec des nombres entiers de dm, car le Boss d'ef nove n'aime pas trop se prendre la tête.

Problème 31

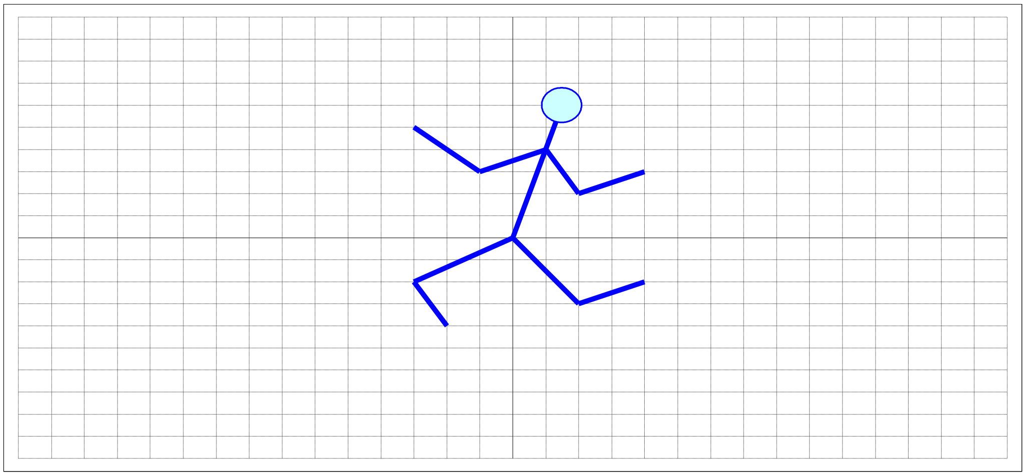
La figure qui vous est proposée ci-dessous est constituée de 8 segments de droites.

Vous allez essayer de la reproduire sur l'ordinateur à l'aide du logiciel de votre choix

Il vous faudra pour cela déterminer l'équation réduite de chacune des 8 droites puis trouver l'intervalle sur lequel elle est définie



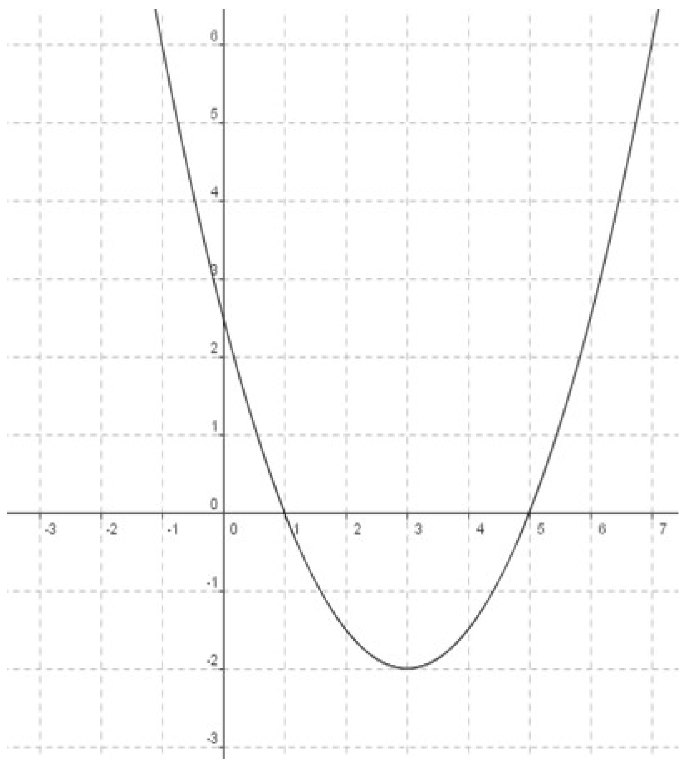
La même activité peut être refaite avec la figure ci-dessous



...etc

Problème 32

Donner l'expression d'une fonction correspondant à cette représentation graphique.



Problème 33

f est définie sur $[-4\,;4]$ par $f(x)=x^2$

→ écrire un algorithme permettant de calculer une valeur approchée de la longueur de la courbe C représentant f

→ écrire un algorithme permettant de calculer une valeur approchée de l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, C et les droites d'équation $x=-4$ et $x=4$.

Problème 34

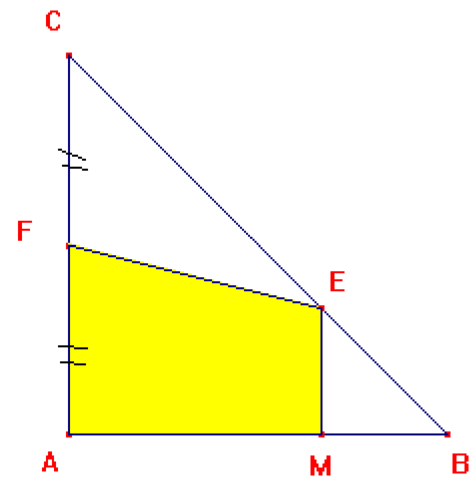
On considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que AB= 5 cm.
Soit F le milieu de [AC]

M [AB]

Soit (d) la perpendiculaire à (AB) issue de M, elle coupe (BC) en E.

On s'intéresse à l'aire du polygone EFAM

Le but de la recherche est de trouver la position du point M sur [AB] pour laquelle l'aire est maximale.

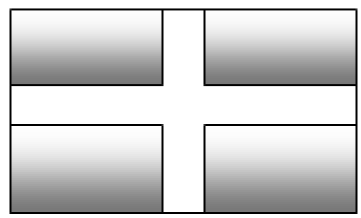


(il est facile d'imaginer des variantes)

version fermée

Problème 35

Un jardin rectangulaire a pour largeur 30m et pour longueur 20m. On décide de tracer deux allées (figure ci-contre).
On souhaite avoir une surface cultivable de 500 m^2



Problème 36

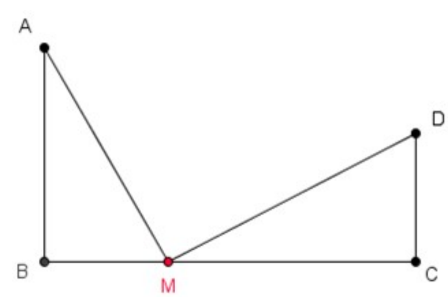
Quand peut-on calculer le nombre $\sqrt{-(2x+7)(-3x-5)}$?

Problème 37 Le plus court chemin…

Sur la figure ci-contre, les segments [AB] et [DC] sont perpendiculaires au segment [BC].

En cm, AB = 5, BC = 9 et CD = 3.

On s'intéresse aux trajets de A à D en passant par un point M du segment [BC].



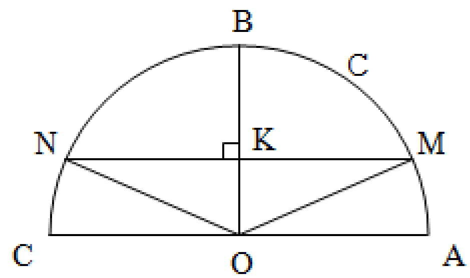
commentaire: ce qui est bon, c'est que ce problème présenté sous cette forme, si vous avez déjà traité les fonctions en classe, amène les élèves à le modéliser à l'aide d'une fonction et à étudier cette fonction. La démonstration finale est d'autant plus convaincante. voir ici

Problème 38

Sur la figure ci-contre:

–les points M et N sont sur le demi-cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 10 cm.

–le point K appartient au rayon [OB] perpendiculaire en O au diamètre [AC].

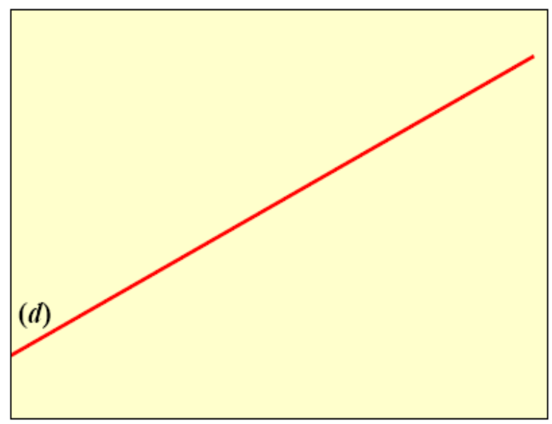


Le but de ce problème est de déterminer la position du point K pour que le triangle NOM ait la plus grande aire possible.

intéressant

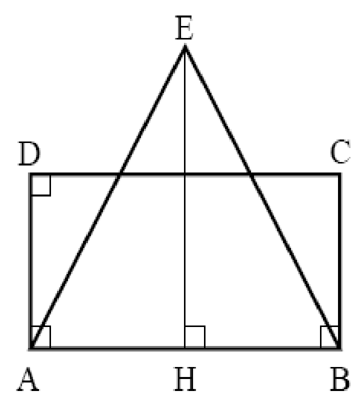
Problème 39

Retrouver, dans le cadre ci-contre un repère orthonormé dans lequel la droite (***d***) a pour équation : $3x + y - 4 = 0$.



Problème 40

La figure ci-contre représente un rectangle ABCD et un triangle isocèle ABE ayant tous les deux 12 cm de périmètre.
Déterminer lequel de ces deux polygones a la plus grande aire suivant la valeur de AB.



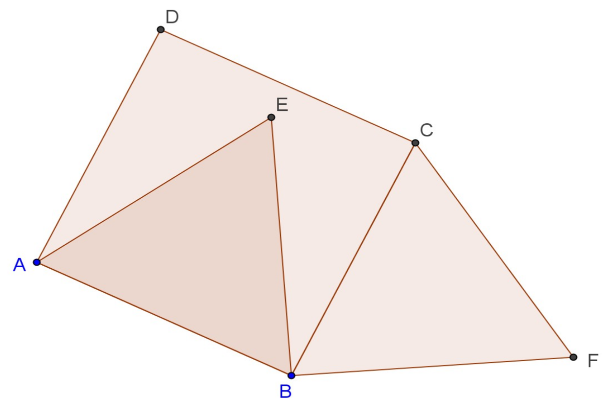
Sources de Problèmes sur ce thème et ce niveau:
site de Frédéric Laroche et son cahier d'activité pour les secondes (cahiers à paraître pour les 1ère S et les Terminales S)

b) Géométrie

Problème 41

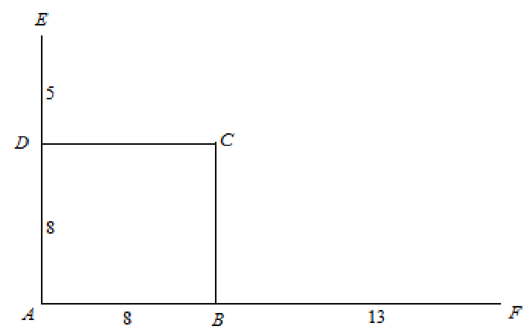
Hyper classique:

ABCD est un carré, AEB et BCF sont équilatéraux.
D, E et F sont-ils alignés ?



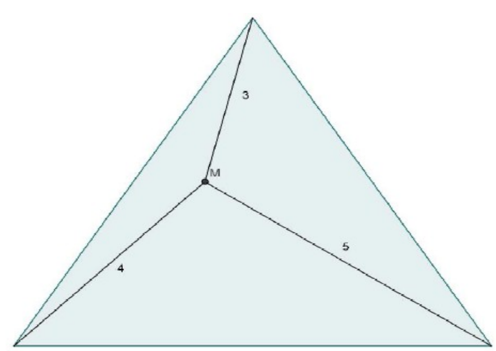
Problème 42

Les points *C*, *E* et *F* sont-ils alignés (tous les angles sont droits) ?

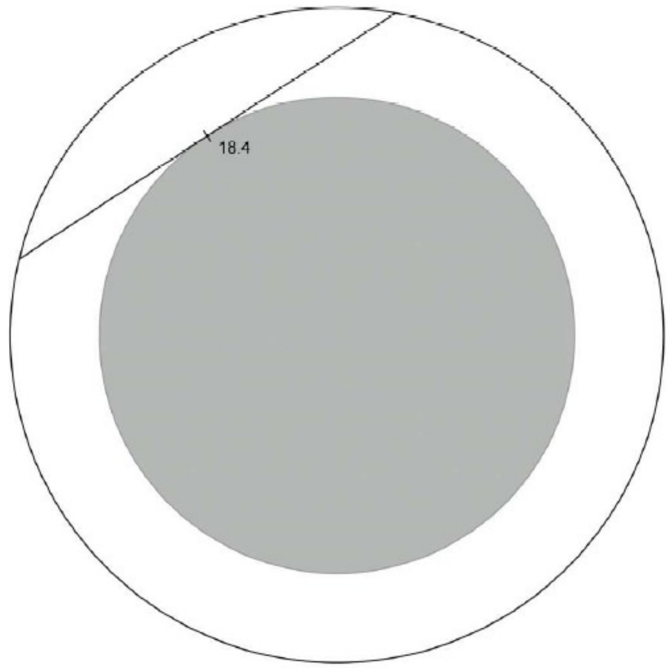


Problème 43 (source: Lycée Pasteur d'Henin-Beaumont)

Dans ce triangle équilatéral, le point M est situé à 3 cm d'un premier sommet, à 4 cm d'un second sommet et à 5 cm du troisième.
Quelle est l'aire de ce triangle équilatéral ?



Problème 44

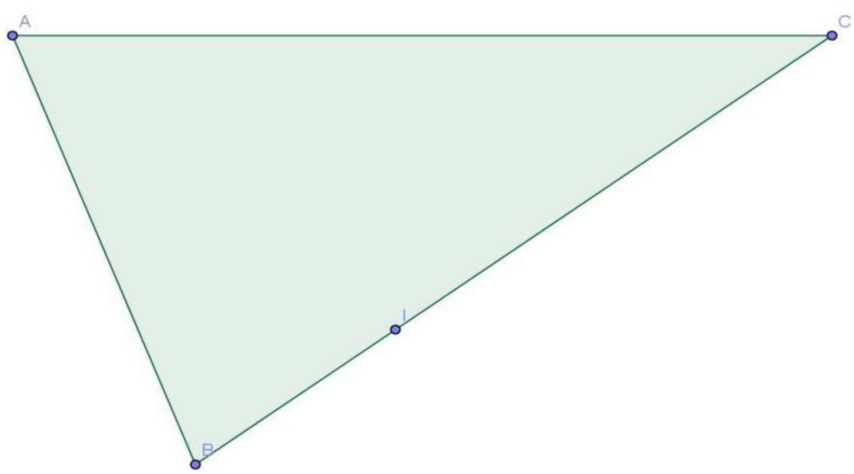


La bibliothèque d'une ville est un bâtiment moderne : les livres sont dans un cylindre central et ils sont accessibles par un couloir circulaire. On mesure la plus grande distance possible dans le couloir, c'est-à-dire une corde du grand cercle extérieur, tangente au cercle intérieur qui contient les livres : on obtient 18,4 m.
Comment trouver l'aire du couloir ?

Problème 45

(Ci-contre, la galaxie du triangle !)

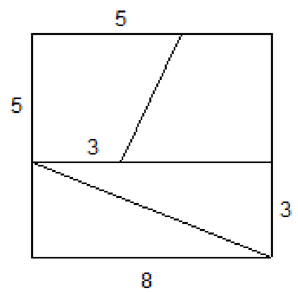
Un triangle et deux points : un énoncé minimaliste ! On peut difficilement faire plus simple...

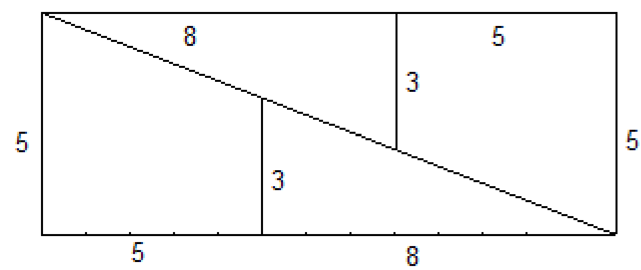


Soient ABC un triangle quelconque et I un point du segment [BC].
Peut-on construire M sur [AC] tel que l'aire du triangle IMC soit égale à la moitié de celle du triangle ABC ?

Problème 46

Paradoxe de Lewis Caroll:





Observer et expliquer ce phénomène !

Problème 47

Peut-on recouvrir une table de 90 cm de côté avec 2 nappes de diamètre 1 m ?

Problème 48

Un point M a pour coordonnées x et y. Construire à la règle et au compas le point de coordonnées $\left(\frac{1}{x} ; \frac{1}{y}\right)$.

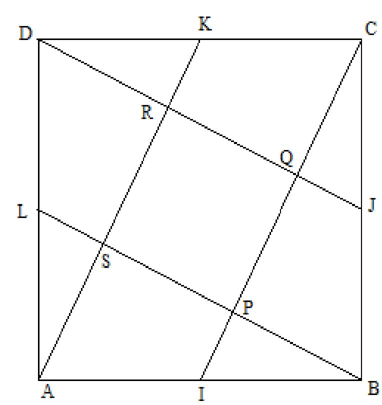
Problème 49

Soit ABCD un carré de sens direct. On note I, J, K et L les milieux des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

Le segment [AJ] coupe [DI] en P et [BK] en Q. Le segment [CL] coupe [BK] en R et [DI] en S.

Démontrer que PQRS est un carré .

Quel est le rapport entre son aire et celle de ABCD ?



Problème 50

Classique:
ABC est un triangle rectangle en A. M est un point de $[BC]$, K et L sont les projetés orthogonaux de M sur $[AB]$ et $[AC]$. Où placer M pour que la distance KL soit la plus petite possible ?

Les fortiches s'intéresseront aussi au cas où ABC n'est pas rectangle en A…

Problème 51

ABC est un triangle ; comment choisir *P* sur [*AB*], *Q* sur [*AC*] et *R* sur [*CB*] pour que le périmètre de *PQR* soit minimum ?

Problème 52

A, B, C et D sont quatre points dans cet ordre sur une droite.

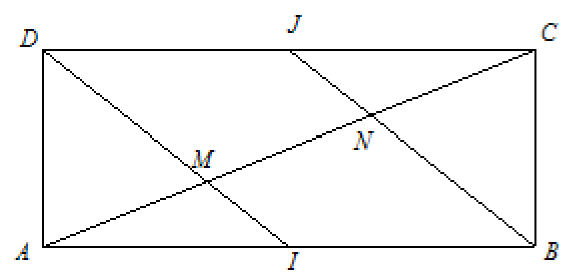
Si $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$ et si $\frac{BC}{CD} = \frac{2}{3}$, que vaut $\frac{AC}{CD}$?

Problème 53

Deux cercles d'un même plan n'ont aucun point en commun. Le premier, de rayon 3 est centré en *P*, le second de rayon 5 est centré en *Q*. Quelle peut être la distance *PQ* ?

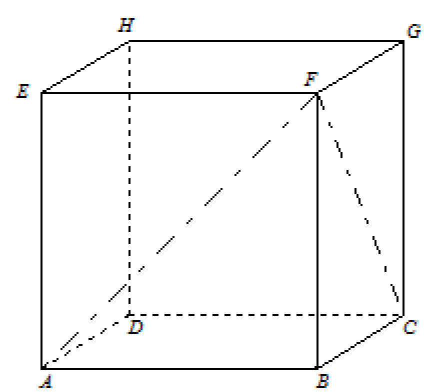
Problème 54

ABCD est un rectangle, *I* est le milieu de [*AB*], *J* celui de [*CD*] ; comment faut-il choisir les dimensions du rectangle *ABCD* pour que les angles en *M* et *N* soient droits ?



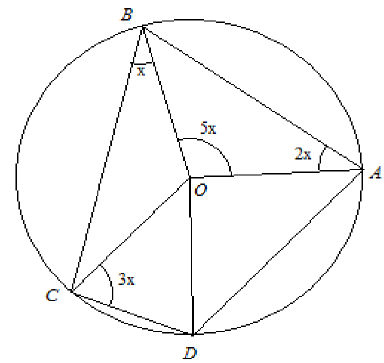
Problème 55

Sur un cube on a tracé deux diagonales. Quelle est la mesure de l'angle formé par ces deux diagonales ?



Problème 56

Calculer x.

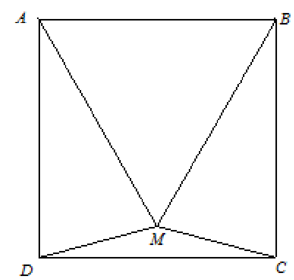


Problème 57

ABM est équilatéral, *ABCD* est un carré. Trouver l'angle $\widehat{DMC}$.

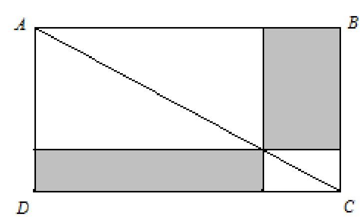
Ou, dans l'autre sens :
M est le point intérieur au carré *ABCD* tel que les deux angles à la base du triangle *DMC* sont égaux à 15°. Que peut-on dire de *AMB* ?.

Sans énoncé c'est encore mieux !



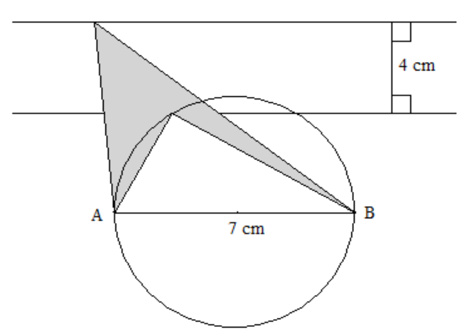
Problème 58

Quel est le rapport entre l'aire grisée et l'aire du rectangle *ABCD* ?



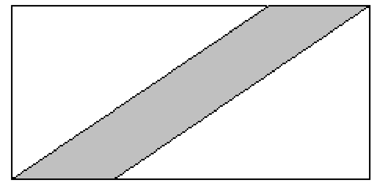
Problème 59

Quelle est l'aire du quadrilatère grisé ?



Problème 60

On considère un jardin de 5 mètres sur 10 mètres. Il est coupé par un sentier de 2m de large comme sur la figure. Quelle est l'aire de ce sentier ?



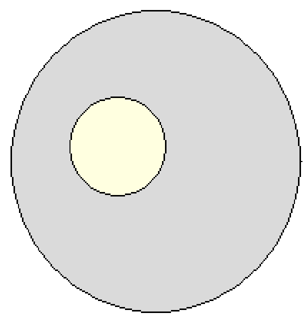
Problème 61

Dans un cylindre de diamètre 16 cm et de hauteur 25 cm on place une bille de rayon 7 cm et on complète avec de l'eau jusqu'à affleurement.

On retire la bille, on plonge une bille de rayon quelconque ; la bille sort-elle de l'eau ? Est-elle sous l'eau ? Y-a-t-il affleurement ?

Problème 62

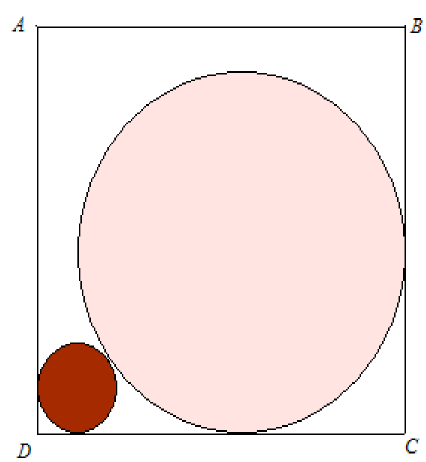
La couronne ci-contre est délimitée par deux cercles de rayons R et r : quelle est l'aire de la partie grisée en fonction de R et r.



Problème 63

La boule et le cochonnet

Le rayon de la boule est quatre fois celui du cochonnet. Ils sont placés dans une boîte de 27 cm de côté. Quels sont leurs rayons ?



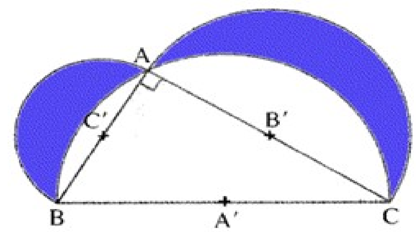
Problème 64

Avec un logiciel :

1. Placer un cercle de centre O et placer un point C extérieur au cercle.
2. Tracer les tangentes (CR) et (CS) au cercle.
3. Placer un point sur le cercle, nommez le T et tracez la tangente en T au cercle qui coupe (CR) en M et (CS) en N.
4. Mesurer CM, CN, MN, CR et CS.
5. Calculer le périmètre du triangle CMN.
6. Déplacer le point C plusieurs fois, reprendre les mesures, comparer les différentes valeurs trouvées pour le périmètre de CMN avec celles de CR.

Problème 65 Les lunules d'Hippocrate de Chios

Au V^e siècle avant J.-C., le mathématicien grec de Chios démontra des liens entre les aires de certaines lunules et les aires de certains polygones. Est ce que la somme des aires de ces deux lunules est plus grande que l'aire du triangle rectangle ABC?

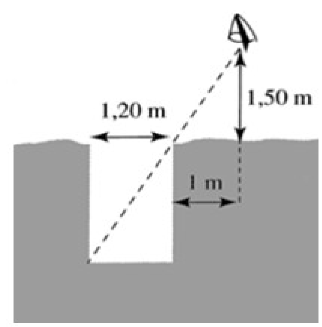


Problème 66

une technique décrite dans un ouvrage d'Euclide utilisée dans l'Antiquité pour mesurer la profondeur d'un puits

En plaçant son œil à 1,50 m de hauteur et à 1 m du bord d'un puits de 1,20 m de diamètre, le bord du puits cache juste la ligne du fond.

Quelle est la profondeur du puits ?



Problème 67

Consideramos un segmento [AB] y un punto C cualquiera que no pertenezca a la recta (AB).

C' es el punto tal que $\overrightarrow{C'A} = -6\,\overrightarrow{CA}$·

I es el punto tal que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC'}$

K es el punto tal que $\overrightarrow{KC'} = -\overrightarrow{KB}$

(CK) intercepta (AB) en M

Va a moverse el punto M si desplazamos el punto C?

Problème 68

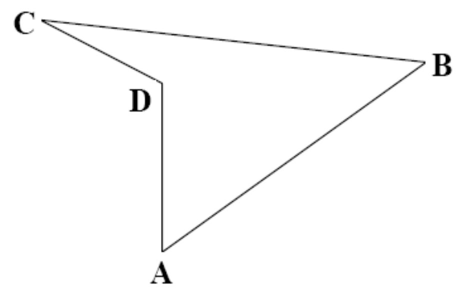
Construire un trapèze ABCD dans lequel le côté [AB] est parallèle au côté [CD] et connaissant les longueurs de ses 4 côtés en cm :

$$AB = 8, AD = 4, BC = 5 \text{ et } CD = 6.$$

Commentaires*: Permet notamment d'introduire la notion de vecteur.* analyse de pratique avec une classe

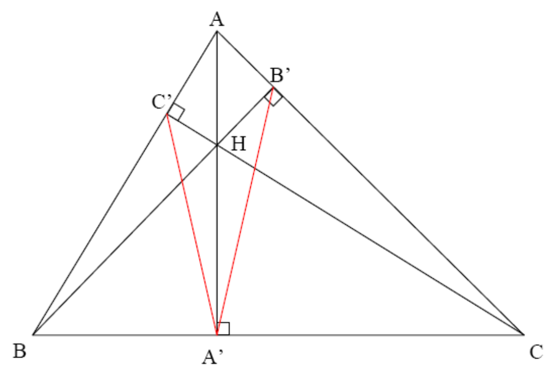
Problème 69

Le quadrilatère ABCD ci-contre a été dessiné dans un repère orthonormal qui a été effacé.
Le retrouver à partir des coordonnées de ses sommets :
A (−4 ; 2) ; B (2 ; −6) ; C (3 ; 6) ;
D (1 ; 2).



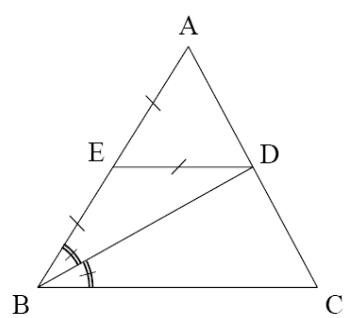
Problème 70

En traçant les trois hauteurs (AA'), (BB') et (CC') d'un triangle quelconque ABC, il semble bien que, par exemple, la hauteur (A'A) soit bissectrice de l'angle $\widehat{B'A'C'}$…



Problème 71

Les hypothèses sont schématisées sur la figure ci-contre.
Justifiez la position la position du D sur [AC] et celle des droites (ED) et (BC).



Problème 72

On connaît les milieux des côtés d'un triangle. Retrouver ses sommets.

Problème 73 (beaucoup plus dur et très intéressant)

On connaît les milieux des côtés d'un quadrilatère convexe.
Retrouver, dans la mesure du possible, ses sommets.

Problème 74

Divers procédés "coutumiers" ont été utilisés au cours du temps pour évaluer une approximation de l'aire d'un quadrilatère à partir des longueurs des côtés, en effet l'aire n'est pas calculable si ces longueurs sont les seuls éléments connus.
Un des précédés est le suivant : *on fait le produit des moyennes des longueurs des côtés opposés.*
Ce procédé semble avoir été largement utilisé, il est déjà mentionné dans le Papyrus de Rhind qui date de 1650 avant Jésus-Christ, et il encore utilisé de nos jours par les paysans du Nordeste brésilien1.
Quels sont les quadrilatères pour lesquels cette formule est exacte ?
Que peut-on dire de l'aire des autres quadrilatères ?

Problème 75

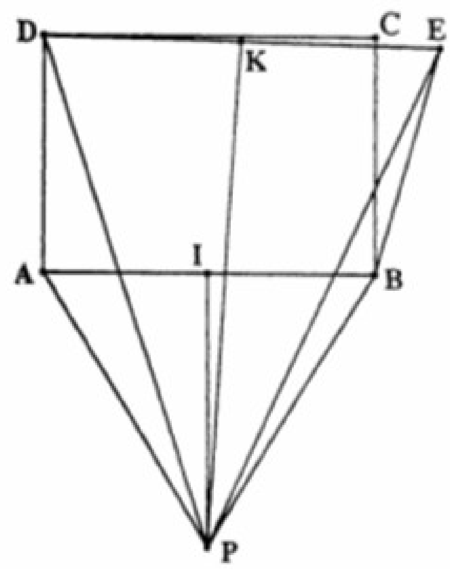
Northrop, E.P. *Fantaisies et paradoxes mathématiques*, traduit par J. Bodet. Collection "Les heures scientifiques". Ed. Dunod 1956
Sur la figure ci-contre, on a construit :

- un rectangle ABCD ;
- le point E à l'extérieur de ABCD tel que BE = BC ;
- la droite (IP) médiatrice de [AB] ;
- la droite (KP) médiatrice de [DE].

Or, dans les triangles ADP et BEP on a :

- BE = AD par construction de E,
- PA = PB car P sur la médiatrice de [AB],
- PD = PE car P sur la médiatrice de [DE].

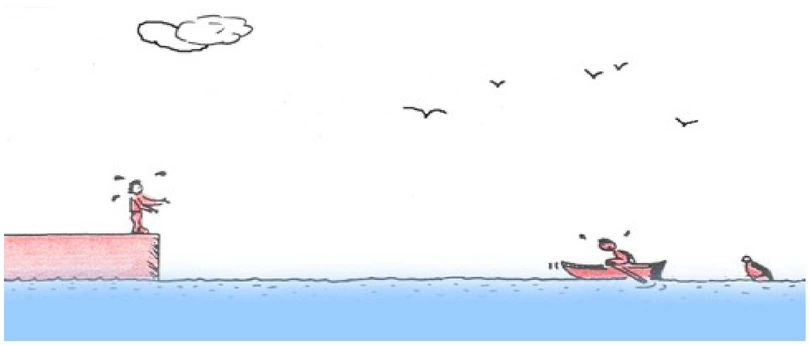
Les triangles ADP et BEP sont donc isométriques d'où :
$\widehat{DAP} = \widehat{EBP}$
Mais comme le triangle PAB est isocèle en P, on a également :
$\widehat{PAB} = \widehat{PBA}$.
On a donc : $\widehat{DAP} - \widehat{PAB} = \widehat{EBP} - \widehat{PBA}$, autrement dit
$\widehat{DAB} = \widehat{EBA}$ … !



Problème 76 Cœur brisé... *(dès la 3ème)*

Une histoire mathématico-amoureuse de L. Lubczanski

Vous venez de plaquer l'ex-amour de votre vie ! Vous l'abandonnez sur la jetée, (altitude de ses yeux humides : 4 m) et ramez irrésistiblement vers le large (altitude de vos yeux impitoyables : 1 m).



A quelle distance du rivage échapperez vous à son regard déchirant en disparaissant de son horizon ?

Problème 77 Une feuille en 3 ? (stage St Domingue)

Comment partager une feuille de papier carrée en 3, sans outils de géométrie ?

Énoncé et figure pour permettre de démarrer (les élèves peuvent-ils réellement démarrer seuls ? Peuvent-ils trouver sans la figure?)

source de problèmes sur ce thème et ce niveau:
site de frédéric Laroche et cahier d'activité pour les secondes (1ère S et Terminales S à paraître!)

c) Statistiques et Probabilités

Eduscol, document ressource

Problème 78

Une entreprise emploie 40 hommes et 30 femmes. Les salaires mensuels nets sont récapitulés ci-dessous (en euros)

Salaires hommes	902	905	944	1002	1006	1045	1070	1090	1090	1090
	1126	1130	1152	1180	1180	1224	1250	1282	1295	1340
	1375	1405	1405	1447	1470	1470	1496	1516	1525	1540
	1610	1703	1733	1828	1860	1910	1948	1968	1980	2096
Salaires femmes	902	905	905	905	905	944	944	972	972	1002
	1045	1045	1045	1090	1090	1090	1130	1130	1224	1250
	1250	1375	1405	1438	1470	1470	1540	1610	1733	1860

Votre mission, vous devez l'accepter, est de présenter, des **tableaux**, des **graphiques** et des **calculs** (*que vous avez appris a faire au collège*) permettant de comparer facilement les situations salariales des hommes et des femmes de cette entreprise. Les filles devront présenter une argumentation en faveur des hommes de cette entreprise et les garçons en faveur des femmes.

(*rappel des notions vues au collège : moyenne, moyenne pondérée, médiane, Quartiles, effectif, effectif cumulé, fréquence, fréquence cumulée, diagramme, histogramme, classes…etc*.)

Problème 79

60 joueurs de basket doivent être répartis dans des équipes de 5 à 10 joueurs, de telle sorte qu'aucune équipe n'ait deux ou plus de deux joueurs de plus qu'une autre. Quels sont les nombres d'équipes que ces règles permettent de former ?

Problème 80

Une commission de cinq membres A, B, C. D et E se réunit autour d'une table ronde où le siège du président A est déterminé. De combien de manières les membres peuvent-ils se disposer si A et B refusent d'être voisins, de même que D et E (être assis à la gauche du président, n'est bien sûr pas la même chose qu'être assis à sa droite.)

Problème 81 Étude du temps de déchargement d'une plate-forme

Une société de transport réalise sur une de ses plateformes un contrôle des durées de déchargement de ses camions.

Les durées relevées sont données dans le tableau suivant :

Durées de déchargement (minutes)	Nombre de camions
25	2
26	5
27	12
28	36
29	45
30	32
31	8
32	3
Total	143

La plateforme est performante si les deux conditions suivantes sont respectées:

-la durée moyenne de déchargement doit appartenir à [28 ; 30],

-la durée de déchargement doit être inférieure ou égale à 30 minutes pour plus de 95 % des camions.

Problème 82 Y'a d'la truffe

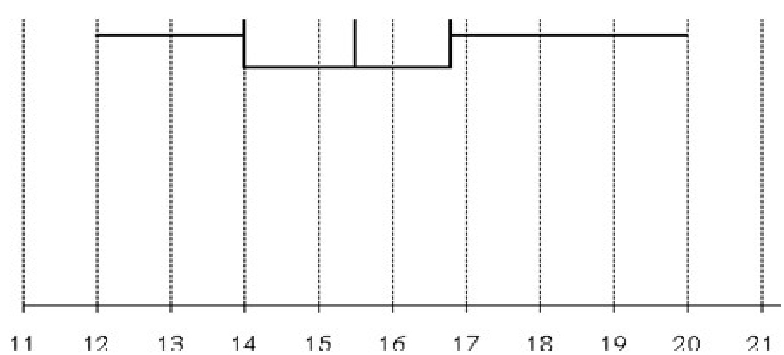
Un trufficulteur (agriculteur cultivant les truffes, *tuber melanosporum*) décide de tester l'influence de l'arrosage de ses truffières sur la masse des truffes récoltées. Il décide donc de répartir ses récoltes en deux lots de 100 truffes :

- le premier, appelé lot A, provient de truffières ne recevant aucun arrosage ;
- le second, appelé lot B, provient de truffières arrosées.

Au moment de la récolte il pèse ses truffes et obtient, pour le lot B, les résultats suivants :

Masse en grammes	15	15,5	16	16,5	17	17,5	18	18,5	19	19,5	20	20,5	21	21,5	22	Total
Nombre de truffes	16	4	20	14	22	4	B	3	2	1	2	0	1	0	3	100

Et pour le lot A:



Problème 83 Mariages

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2	TABLEAU 1												
3		1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	Total	Fréquence en%
4	Janvier	5 556	6 182	6578	8 152	7 185	6 362	6749	7243	7 157	6 500	67 664	
5	Février	S 342	10 139	9721	9 159	9444	8 726	8 623	9 775	8 399	8 200	90 528	
6	Mars	9845	8 470	8 939	8 947	11 334	10 852	11 036	8 702	9 146	9700	96 971	3,5%
7	Avril	15 978	16 025	18 020	20 721	17430	15 012	16 172	18 013	17812	16 900	17 2083	6,2%
8	Mai	26 516	27 886	25 098	23 371	23 276	26 248	28 335	27 101	24 761	25000	257 592	9,2%
9	Juin	52 923	45 249	47 824	52100	61 737	54 575	50 986	47041	49 044	47 500	50 8979	18,2 %
10	Juillet	50633	47 532	57 541	58 932	42 536	42 763	43241	52 121	55 169	51 400	501 868	17,9 %
11	Août	45 028	42 188	38 847	38 936	39781	45 934	43614	35 079	36 675	34 700	400 782	14,3 %
12	Septembre	31 882	32 556	34887	40 191	40366	31 401	31 248	31 639	32 664	35900	342 734	12,2 %
13	Octobre	16 139	16 452	17 544	15 420	14441	15 811	15894	16 279	15 859	12 900	156 739	5,6%
14	Novembre	9 703	8 215	9522	9 388	8 897	10 011	8 860	8465	8 870	8400	90331	3,2%
15	Décembre	11 439	10 467	11 670	12 605	11 828	11 392	11 205	10 140	10 747	10 200	111 693	4,0%
16	TOTAL	283 984	271 361	286 191	297 922	288 255	279 087	275 963	271 598	276 303	267 300	2 797 964	100,0 %

Le tableau ci-dessus est une feuille automatisée de calcul. faites parler ce document.

Problème 84 Population française en 2030

Le tableau ci-dessous donne la répartition en fonction de l'âge de la population française en 2010 et une prévision pour 2030.

Utiliser tous vos moyens statistiques, y compris informatiques, pour comparer ces deux séries.

Age	Effectif en 2010	Effectif prévu en 2030
[0;10[	7,6	6,5
[10;20[	7,7	6,8
[20;30[	8,1	7,3
[30;40[	8,3	7,4
[40;50[	8,6	7,9
[50;60[	8,2	8,3
[60;70[	6,3	8,2
[70;80[	4,6	6,4
[80;90[	2,9	3,5
[90;100[	0,6	0,9

Problème 85 Qui a les meilleurs réflexes?

Nous allons déterminer quel est l'élève de la classe qui a les meilleurs réflexes. Pour cela, nous allons réaliser avec chaque élève une expérience simple de mesure indirecte du temps de réaction.

Travaux pratiques par groupes de trois élèves

Un des élèves tient une règle, graduée en cm, en la laissant pendre. Un autre place le pouce et l'index au niveau du zéro en bas de la règle, sans la tenir. Lorsque la règle est lâchée sans l'avertir, il essaye de l'attraper au vol. Le troisième élève enregistre, dans le tableau d'un tableur-grapheur, la hauteur *h* correspondant à la distance entre le bas de la règle et le point attrapé. Ce test est effectué 40 fois par chacun des trois élèves. utiliser tous les indicateurs statistiques numériques ou graphiques que vous connaissez pour comparer les performances.

Commentaires

Cette activité met en œuvre des travaux expérimentaux de deux sortes : des travaux pratiques permettant de construire des séries statistiques individualisées, et des calculs d'indicateurs statistiques à l'aide des TIC.

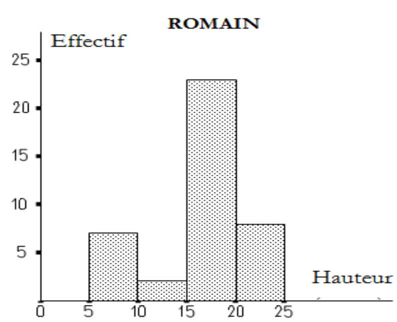
Le calcul « à la main » des indicateurs statistiques ne présente aucun intérêt dans la mesure où les TIC permettent de les obtenir très facilement.

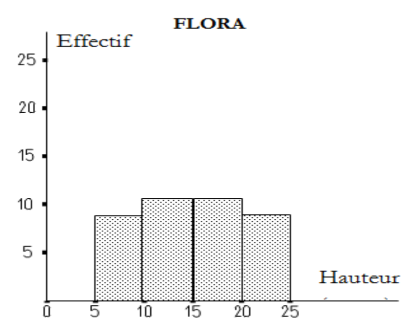
Identifier l'élève qui a les meilleurs réflexes est aisé si l'un d'entre eux se détache des autres en ayant les meilleurs indicateurs (ceux de l'élève Frédéric par exemple). Dans le cas contraire, il est nécessaire d'identifier le ou les indicateurs pertinents. Les élèves doivent rechercher ce ou ces indicateurs, en justifiant leur choix en donnant du sens à ces nombres. Le fait qu'ils soient obtenus à partir de données individualisées facilite leur interprétation et permet de comparer plus facilement des séries deux à deux.

Dans l'activité présentée, si l'objectif est de repérer dans la classe le meilleur chronométreur pour une compétition d'athlétisme, celui ayant la plus faible étendue est le mieux placé. Si l'objectif est de trouver le plus régulier, il faut rechercher les plus petites valeurs du couple « moyenne, écart type »

Il est intéressant de faire remarquer que deux séries de même écart type (ou très peu différent) peuvent, si elles sont éloignées d'une distribution normale, avoir une distribution très différente. Un graphique peut alors montrer davantage qu'un simple résumé numérique.

Les élèves Romain et Flora ont des indicateurs statistiques identiques mais les distributions sont très différentes. Elles montrent que Flora réussit des hauteurs inférieures à 15 cm plus souvent que Romain.





Information

La distance indiquée sur la règle permet d'accéder au temps de réaction. En effet, la hauteur *h* d'une chute de durée *t* étant donnée par $h = \frac{1}{2} g\, t^2$, le temps de réaction est : $t = \sqrt{2 \frac{h}{g}}$.

Problème 86 Boules

On tire au hasard une boule d'une urne contenant deux boules rouges notées R_1 et R_2, une boule verte notée V et deux boules bleues notées B_1 et B_2. On ne remet pas la boule tirée et on effectue un second tirage d'une boule.

On appelle résultat un couple dont le premier élément est la boule obtenue au premier tirage et le second, celle obtenue au second tirage, par exemple (R_1, B_2).

On complète la situation précédente par une règle du jeu :

- pour chaque boule rouge tirée, on gagne 1 euro ;
- pour chaque boule verte tirée, on gagne 2 euro ;
- pour chaque boule bleue tirée, on perd 2 euro.

Le jeu est-il équitable ?

Problème 87 TP Tableur Nous voulons une fille !

Remarque technique Calc: on utilise ici la fonction **=ALEA()** de Calc. Cette fonction renvoie un nombre au hasard (aléatoire) compris entre 0 et 1 (1 non compris).

Vous devrez appuyer sur la touche « F9 » pour recalculer votre feuille.

Dans une petite ville (imaginaire bien sûr !), il y a 2000 couples. Ils ont tous au moins un enfant et tous veulent une fille. Cependant ils ne veulent pas plus de quatre enfants.

Ils appliquent donc tous la stratégie suivante : ils feront un autre enfant tant qu'ils n'ont pas une fille ou quatre garçons.

Nous admettrons que chacun de ces couples peut avoir autant d'enfants qu'il le désire, qu'à chaque naissance, ils ont autant de chance d'avoir un garçon qu'une fille et qu'ils n'ont pas de jumeaux.

Pensez-vous que le nombre de filles dans cette ville sera supérieur, inférieur ou à peu près égal à celui des garçons (expliquez…) ?

Problème 88 Dans le grenier

En fouillant dans un vieux cahier d'écolier datant de 2018 j'ai retrouvé cet algorithme… Aussitôt, me précipitant sur mon **Ubuntu 18.4 5G++** je rentre le programme par synthèse vocale et je vois se dessiner les positions des points de coordonnées (i, x).

Algorithme 1
Variables: x, n, i, entiers; q réel. Entrée: Saisir n. Initialisation:x et q prennent la valeur 0. Traitement: Pour i variant de 1 à n,
Si alea(0…1)<0,5 alors x prend la valeur $x+1$, sinon x prend la valeur $x-1$. Fin si. Si x=0 alors q prend la valeur q+1. Fin si.
Fin pour. Sortie :Afficher x. Afficher $1-q/n$.

1. Expliquer ce que fait ce programme et à quoi correspondent les variables x, n et q. traduire cet algorithme sur algobox.

2. Compléter le tableau suivant :

n	100	1 000	10 000	100 000
$1-q/n$				

3. a. Modifier l'algorithme pour garder une trace du nombre de fois où x prend une valeur donnée entre $-n$ et n.
b. Relever vos données et faire un graphique pour n=50 : histogramme avec x en abscisse et n en ordonnée.
4. Un trader se dit que cet algorithme pourrait lui servir de modèle pour le cours d'une action en Bourse. Quelle est alors la signification pratique des diverses variables pour le trader ?
5. *Pour aller plus loin* : que se passe-t-il si on passe dans le plan puis dans des espaces de dimension supérieure ? On pourra consulter Wikipedia, article Marche aléatoire.

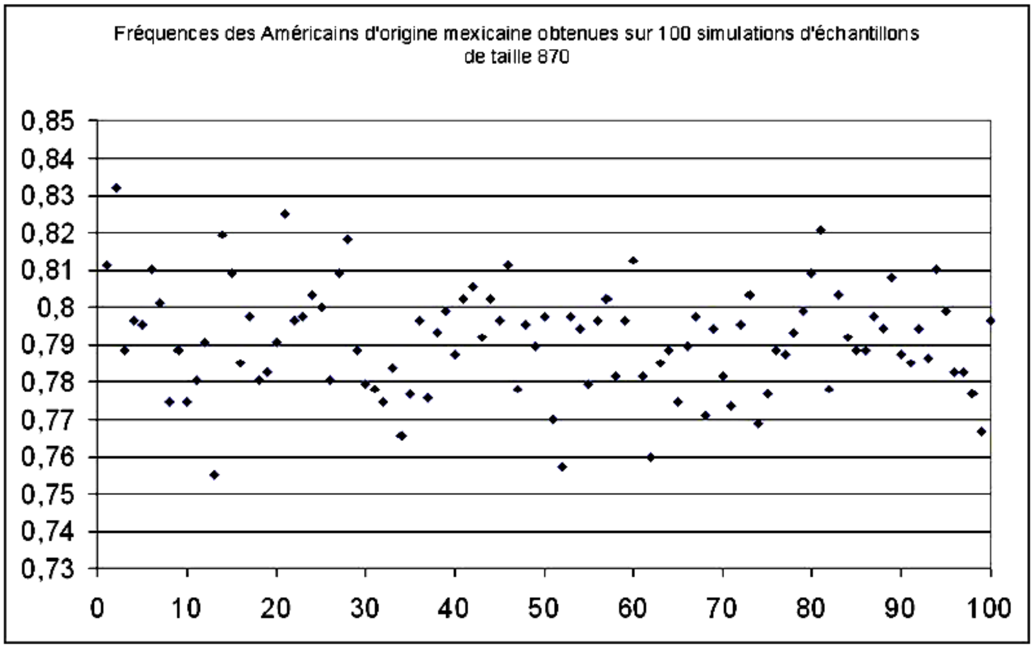
Problème 89 Contester un jugement

(Source : *Prove it with figures* – H. Zeisel et D Kaye.)

En Novembre 1976 dans un comté du sud du Texas, Rodrigo Partida était condamné à huit ans de prison. Il attaqua ce jugement au motif que la désignation des jurés de ce comté était discriminante à l'égard des Américains d'origine mexicaine. Alors que 79,1% de la population de ce comté était d'origine mexicaine, sur les 870 personnes convoqués pour être jurés lors d'une certaine période de référence, il n'y eut que 339 personnes d'origine mexicaine.

1. Quelle est la fréquence des jurés d'origine mexicaine observée dans ce comté du Texas ?

2. La simulation sur un tableur du prélèvement d'échantillons aléatoires de taille $n = 870$ dans une population où la fréquence des habitants d'origine mexicaine est $p = 0,791$. Les fréquences des habitants d'origine mexicaine observées sur 100 échantillons simulés sont représentées ci-dessous.



a. Calculer les bornes de l'intervalle $[\, p-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p+\frac{1}{\sqrt{n}}]$. (Arrondir à 10^{-2}).

b. Quel est le pourcentage des simulations fournissant une fréquence en dehors de l'intervalle précédent ?

3. Sur les simulations, est-il arrivé au hasard de fournir une fréquence d'habitants d'origine mexicaine comparable à celle des jurés d'origine mexicaine observée dans ce comté du Texas ?

4. Comment expliquez-vous cette situation ?

Commentaires

Les données étudiées constituent une « preuve statistique » du fait que la constitution de ces jurys n'est pas totalement aléatoire, c'est-à-dire que ceux ci ne sont pas « représentatifs » de la population, du point de vue du caractère hispanique. Les calculs précédents montrent qu'il n'est pas possible de considérer que les jurys résultent d'un tirage au sort où chaque élément de la population a les mêmes chances d'être choisi. Mais c'est tout ce que l'on peut dire et, en particulier, il n'est pas possible de se prononcer sur les causes et porter des accusations de discrimination raciale. L'étude statistique précédente doit inciter à enquêter sur les conditions de constitution des jurys. Le constat pourra alors être fait que pour être juré on doit maîtriser la langue anglaise (écrite et parlée), ce qui n'est pas le cas de la majorité de la population d'origine hispanique, que pendant les 11 années correspondant à l'étude, la proportion des hispaniques dans la population a évolué, et que la proportion d'hispaniques dans les jurys a également évolué au cours de ces 11 années.

Problème 90 Premier tour des présidentielles 2002

Voici un extrait d'article, publié dans le journal « Le Monde » par le statisticien Michel Lejeune, après le premier tour de l'élection présidentielle de 2002.

« Pour les rares scientifiques qui savent comment sont produites les estimations, il était clair que l'écart des intentions de vote entre les candidats Le Pen et Jospin rendait tout à fait plausible le scénario qui s'est réalisé. En effet, certains des derniers sondages indiquaient 18 % pour Jospin et 14 % pour Le Pen. Si l'on se réfère à un sondage qui serait effectué dans des conditions idéales [...], on obtient sur de tels pourcentages une incertitude de plus ou moins 3 % étant donné la taille de l'échantillon [...]. »

1. Si l'on tient compte de l'incertitude liée au sondage, entre quels pourcentages pourraient se situer réellement (à 95 % de confiance) les deux candidats lorsque le sondage donne 18 % pour l'un et 14 % pour l'autre ?

2. Représenter sur un même graphique les deux « fourchettes » calculées à la question précédente. Peut-on prévoir l'ordre des candidats ?

3. Au premier tour de l'élection présidentielle de 2002, L. Jospin a obtenu 16,18 % des voix et J.-M. Le Pen 16,86 %.

Expliquer la phrase « l'écart des intentions de vote entre les candidats Le Pen et Jospin rendait tout à fait plausible le scénario qui s'est réalisé ».

Commentaires

Voici un exemple où quelques notions mathématiques de base (pourcentage, représentation des nombres, intervalle, intersection) sont nécessaires à la bonne compréhension d'un article de presse de la rubrique société ou politique.

La lecture du texte est une des difficultés de l'exercice, mais montre aussi l'intérêt de la situation.

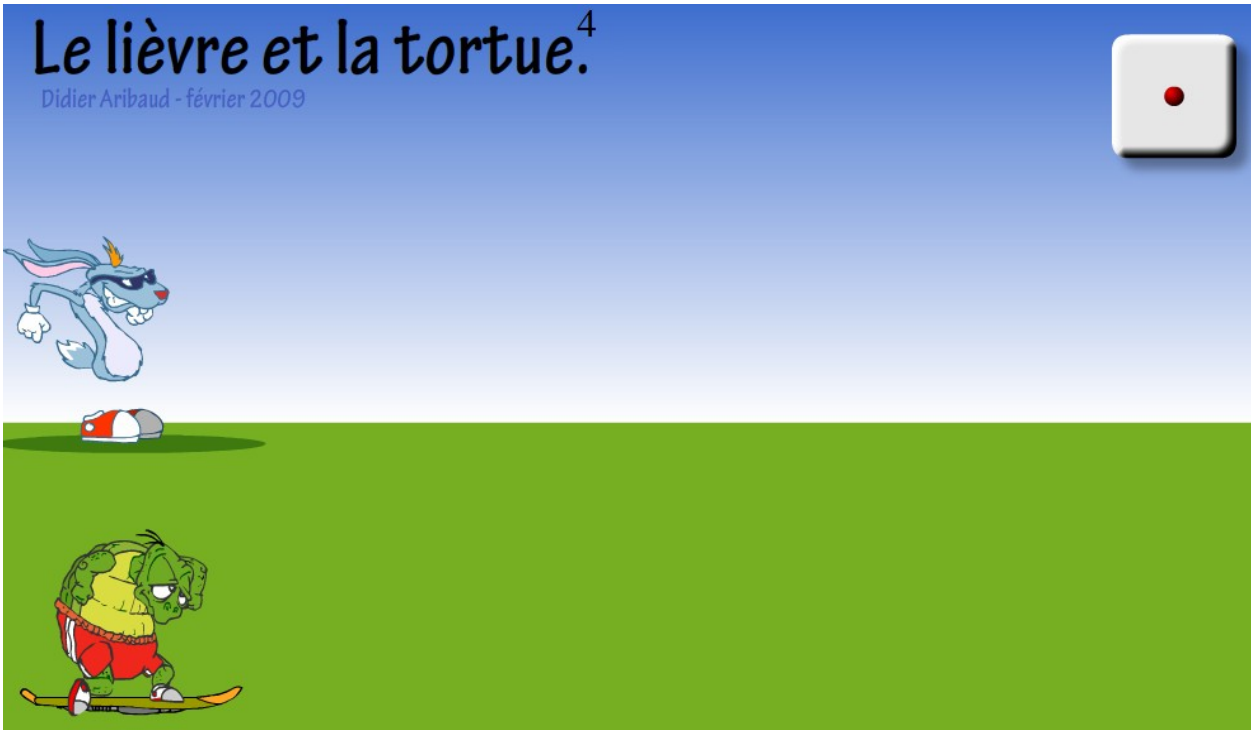
L'aspect fluctuation d'échantillonnage (plus ou moins 3 % sur un échantillon de taille mille, c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0,03$) n'est pas pris en compte dans cet exercice, qui se veut élémentaire. La « confiance » est donnée au statisticien. Il est possible d'expérimenter la pertinence de ce 3 % (environ 95 % de confiance) par simulation.

Problème 91

Un joueur de tennis réussit sa première balle de service à 75%. Il réussit sa seconde balle de service à 90%.

Quelle est la probabilité pour que ce joueur commette une double faute (service perdu à la seconde balle) ?

Problème 92 le Lièvre et la Tortue (Didier Aribaud - lycée Alexandre Dumas de Port-au-Prince)



voici le fichier à ouvrir avec firefox

source sur ce thème et ce niveau:
site de Frédéric Laroche et son cahier d'activité pour les secondes (1ère S et Terminales S à paraître!)

d) nombres, calculs, arithmétique, algèbre

Problème 93 ***Voici une liste de nombres en vrac*** **:**

3 8,345 $-\dfrac{20}{3}$ -7 $\dfrac{9}{4}$ $\sqrt{2}$ 1,33333333333…. π

2,545454545454…. 8^4 2^{-3} $-\sqrt{169}$ $2{,}34\ 10^{15}$

$2{,}34\ 10^{-15}$ $\dfrac{-21}{15}$ $\dfrac{15}{11}$ $\dfrac{153}{17}$ $\sqrt{37}$

Classer ces nombres dans des ensembles à définir.

Problème 94 Observer, vérifier, généraliser et prouver :

$$1^2+2^2=\frac{3^2+1}{2},\ 2^2+3^2=\frac{5^2+1}{2},\ 3^2+4^2=\frac{7^2+1}{2},\ 4^2+5^2=\ldots.$$

Problème 95

Créer une feuille de calcule sur un logiciel tableur permettant de calculer le pgcd de deux entiers.
→ En déduire un algorithme et le traduire sur algobox

Problème 96

Jeanne note trois nombres. En les additionnant deux à deux elle obtient les sommes 63, 65 et 68. Quel est le plus petit des trois nombres notés ?

Problème 97

Trouver les deux derniers chiffres de 2^{222}

Problème 98

Si l'on écrit sous forme décimale le nombre $100^{33}-33$, quelle est la somme de ses chiffres ?

Problème 99

Quel est le chiffre des unités de 37^{1995} ?

Problème 100

Le produit de deux nombres qui se terminent par 76 se termine aussi par 76.

Problème 101

Je gagne 1 € le premier jour, 2 € le deuxième, 3 € le troisième, etc. Au bout de combien de jours aurai-je 50 005 000 € ?

Problème 102

Quel est le reste de la division de 3^{1999} par 9 ?

Problème 103

Il existe des nombres naturels n pour lesquels n^6-n^2 n'est pas divisible par l'un des cinq nombres suivants.
Lequel ? 8 10 12 15 20

Problème 104

Les entiers de la forme n^3-n sont divisibles par 6. Vrai ou faux ? Ceux de la forme n^6-n^2 sont divisibles par 36. Vrai ou faux ?

Problème 105

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Existe-t-il un triangle équilatéral dont les coordonnées sont des nombres entiers ?

Problème 106

Si x est négatif et que xy = 6, yz = 24 et xz = 16, que vaut xyz?

Problème 107

créer un algorithme permettant de tester si un nombre est premier ou non. (prolongement en T^ale^ S spécialité)

Problème 108

Soient a et b deux entiers naturels. Sachant que $a^2 - b^2$ est un nombre premier que peut-on dire de a et b ?

Problème 109

Quel entier naturel x satisfait $\frac{x}{25}=\frac{16}{x}$?

Problème 110

Si on a $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=7$ alors $x^3+\frac{1}{x^3}=$?

Problème 111

Résoudre l'équation $3^x-3^{x-3}=78\sqrt{3}$.

Problème 112

Une mouche volant à 400 km/h part de Paris à 8h du matin en longeant la ligne TGV. Le TGV part en même temps qu'elle de Paris à 200 km/h ; à 9 h un autre TGV part de Marseille (la distance Paris-Marseille est de 700 km) à 300 km/h.

La mouche vole le long de la ligne jusqu'à ce qu'elle rencontre le TGV de Marseille ; à ce moment elle fait demi-tour, toujours en suivant la ligne, et rencontre le train venant de Paris, moment où elle fait demi-tour, etc. Lorsque les deux trains se croisent la mouche meurt. Sur quelle distance la mouche a-t-elle volé ?

Problème 113

Soient x, y et z trois nombres réels positifs tels que $x \leqslant y \leqslant z$. Des nombres suivants lequel est le plus grand ?

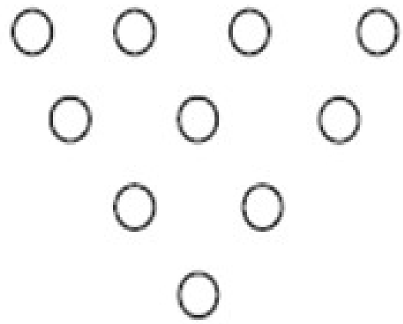
$$x^{y^z} ; x^{z^y} ; y^{x^z} ; y^{z^x} ; z^{x^y} ; z^{y^x}$$

Problème 114

Si on a $\begin{cases} -2{,}5 \leqslant a \leqslant -0{,}5 \\ -3 \leqslant b \leqslant 2 \end{cases}$, donner un encadrement du produit ab.

Problème 115

On arrange 2007 oranges en pyramide (dessin ci-dessous) de la façon suivante :



au sommet (1ère ligne) : 1 orange ; 2ème ligne : 2 oranges ; 3ème ligne : 3 oranges ; 4ème ligne : 4 oranges; etc...

Combien y a -t- il d'oranges sur la dernière ligne ?

Et si on recommence avec 100 000 oranges ?

Problème 116 l'addition s'il vous plait !!

Dix personnes prennent un repas ensemble. Chacune d'elle choisit un menu parmi les trois suivants : 10 €, 12 € et 15 €. Le montant de l'addition du groupe s'élève à 120 €.
Le lendemain le même groupe retourne au même restaurant qui pratique encore les mêmes tarifs. Ceux qui avaient choisi le menu à 10 € prennent cette fois ci celui à 12€, ceux qui avaient choisi celui à 12 €, prennent celui à 15 € et ceux qui avaient choisi celui à 15 € choisissent celui à 10 €. Le montant de l'addition du groupe s'élève cette fois ci à 135 €
Est-ce possible ? Pourquoi ?
Si l'on est certain du montant de 135 € du deuxième jour, quel est le montant possible de l'addition du premier jour ?
académie de Strasbourg - commentaires

Problème 117 Des Kiwis ? au Danemark ? *(exploitable de la 6ème à la term)*

Choisir un nombre entre 2 et 10
Multipliez ce chiffre par 9.
Vous obtenez un nombre à deux chiffres.
Additionnez ces deux chiffres ensemble, vous obtenez un nombre auquel vous soustrayez maintenant 5.
Avec le résultat obtenu, vous choisissez la lettre de l'alphabet qui correspond (A = 1, B = 2, C = 3, etc).
Choisissez un pays d'Europe qui commence par la lettre précédemment obtenue.
Avec la dernière lettre de ce pays, choisissez un fruit qui commence par cette lettre et qui pousse dans ce pays.

***variante** : Pourquoi se limiter entre 2 et 10 .... La création d'un fichier tableur est déjà un bon exercice d'algorithmique. (stage St Domingue)*

Première

Document d'accompagnement 1ère S, ES et L (ancien programme)

c) Scientifique

programme à partir de 2011-2012
….Le programme s'inscrit, comme celui de la classe de seconde, dans le cadre de la résolution de problèmes. Les situations proposées répondent à des problématiques clairement identifiées d'origine purement mathématique ou en lien avec d'autres disciplines.
Un des objectifs de ce programme est de doter les élèves d'outils mathématiques permettant de traiter des problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus ou discrets....
….

Utilisation d'outils logiciels

L'utilisation de logiciels, d'outils de visualisation et de simulation, de calcul (formel ou scientifique) et de programmation change profondément la nature de l'enseignement en favorisant une démarche d'investigation.
En particulier, lors de la résolution de problèmes, l'utilisation de logiciels de calcul formel peut limiter le temps consacré à des calculs très techniques afin de se concentrer sur la mise en place de raisonnements.
L'utilisation de ces outils intervient selon trois modalités :

- par le professeur, en classe, avec un dispositif de visualisation collective ;
- par les élèves, sous forme de travaux pratiques de mathématiques ;
- dans le cadre du travail personnel des élèves hors de la classe.

Diversité de l'activité de l'élève

Les activités proposées en classe et hors du temps scolaire prennent appui sur la résolution de problèmes purement mathématiques ou issus d'autres disciplines. De nature diverse, elles doivent entraîner les élèves à :
– chercher, expérimenter, modéliser, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
– choisir et appliquer des techniques de calcul ;
– mettre en œuvre des algorithmes ;
– raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
– expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit.

- **algèbre - analyse**

Problème 118

Soit une fonction f définie sur [0;1] par: $f(x)=x-2\sqrt{x}+1$
Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$
On admettra que C est tangente aux deux axes de coordonnées aux points (1;0) et (0;1).
C est-elle un arc de cercle ?

Problème 119

Les maisons d'Albert et de Marcel sont distantes de 2,6 km et situées du même côté de la voie ferrée. Celle d'Albert n'est qu'à 700 m de la voie ferrée (rectiligne), tandis que celle de Marcel est à 1 km de plus. Et pourtant leurs maisons sont toutes les deux aussi éloignées de la gare. A quelle distance de la gare se situent les 2 maisons ?

Problème 120

Monsieur et Madame Lebasque vont de Bayonne à Hendaye à vélo. Tous deux roulent à 19 km/h. Soudain, Monsieur augmente sa vitesse, lâche son épouse, pédalant à 29 km/h; il parcourt ainsi 8 km; puis il fait demi-tour à même allure et retrouve sa femme qui a continué pendant ce temps son chemin sans changer de vitesse.

Au bout de combien de temps les époux se retrouvent-ils ?

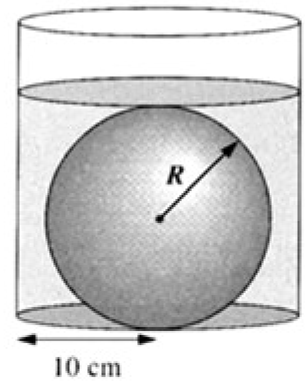
Problème 121   La boule immergée

On désire calculer le rayon *R* d'une bille d'acier en la déposant au fond d'un récipient cylindrique de 10 cm de rayon, et en y versant un volume *V* d'huile, jusqu'au recouvrement de la bille.

La surface libre de l'huile affleure alors le sommet de la bille.

La hauteur du récipient dépasse 20 cm.

Quel doit être le rayon R pour que V soit égal à 2400 cm^3 ?



Problème 122

Dans un disque de rayon *R*, on découpe un secteur circulaire de radians. On fabrique avec le secteur restant un cône.

On désigne par *h* la hauteur du cône. Vérifier que 0 *h* *R*.

Exprimer le volume V du cône en fonction de *h*. Pour quelle valeur de *h* le volume est-il maximal ? que vaut alors θ ?

Problème 123

Déterminer l'équation d'une parabole passant par les points A(0;5) , B(3;1), sachant de plus que la tangente en B a pour coefficient directeur 2.

Problème 124 « Mezzo-veloce »

Un mobile effectue la moitié d'un trajet à la vitesse constante 25 km/h et l'autre moitié à une autre vitesse constante.

A quelle vitesse doit-il parcourir la seconde moitié pour que sa vitesse moyenne soit supérieure à 37,5 km/h ?

Problème 125 Le problème des bacs (D'après *Les Casse-tête, mathématiques de Sam Loyd*, M. Gardner. Éd. Dunod.)

Deux bacs partent en même temps des deux rives opposées de l'Hudson, l'un allant de Jersey City à New York, l'autre de New York à Jersey City. L'un étant plus rapide, ils se croisent à 720 mètres de la rive la plus proche.

Une fois arrivés à leur destination, les deux bateaux restent dix minutes à quai pour débarquer et prendre des passagers, puis ils repartent vers leur point de départ et se croisent à nouveau à 400 mètres de la rive la plus proche.

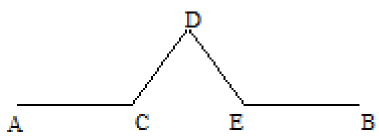
Quelle est la largeur exacte du fleuve ?

Problème 126 Le flocon de neige du mathématicien Suédois Von Koch

On considère les figures F_0, F_1, F_2, ..., F_n, ... obtenues de la manière suivante :

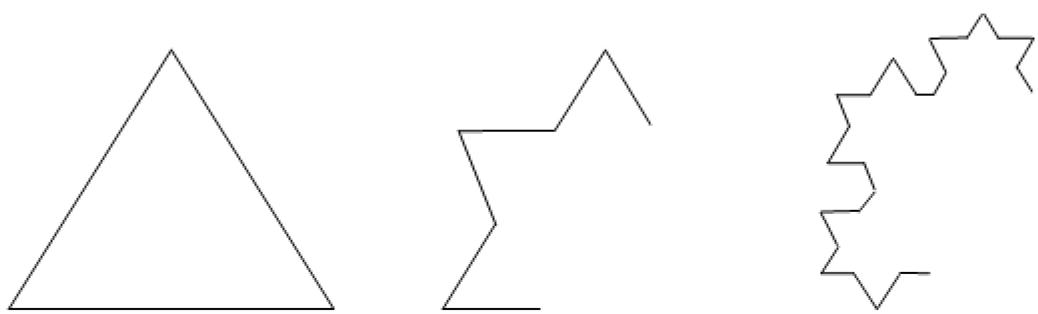
- F_0 est un triangle équilatéral de côté 9 cm.
- On passe d'une figure F_n à la suivante F_{n+1} en remplaçant chaque côté tel que :

par:



où AC = CE = EB, CDE est équilatéral et tracé vers l'extérieur de la figure.

Tracer en vraie grandeur les figures F_0, F_1 et F_2 ébauchées ci dessous :



Étudier les périmètres et les aires de ces figures.

Problème 127

Le radon est un gaz qui se désintègre avec le temps: chaque jour il perd 16,5% de la masse du jour précédent.

Déterminer au bout de combien de jours le gaz aura perdu plus de la moitié de sa masse initiale.

Problème 128

Déterminer le nombre de tonneaux que contient une pile triangulaire de base 30 tonneaux.

Problème 129

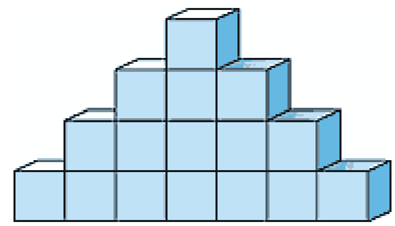
En janvier 2004, on vous propose deux types de contrats. Dans les deux cas le premier salaire net mensuel est de 1500€ et la réévaluation prend effet en janvier de chaque nouvelle année.

1ère proposition : une augmentation fixe de 63,4 €

2ème proposition : une augmentation de 4% sur le salaire mensuel de l'année précédente.

Problème 130 Résoudre un problème d'empilement

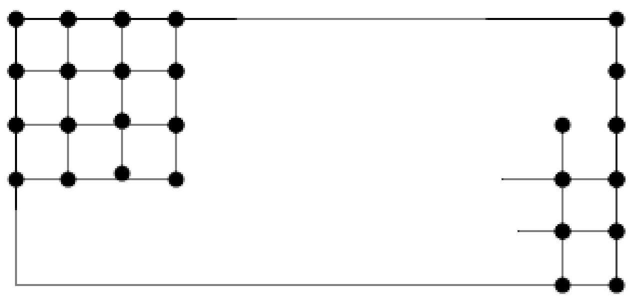
On veut empiler des boîtes cubiques comme indiqué ci-contre.



La rangée du haut contient une boîte, la suivante trois, puis cinq et, ainsi de suite... On souhaite étudier la possibilité de réaliser un empilement avec un certain nombre de boîtes.

On dispose de 500 boites....

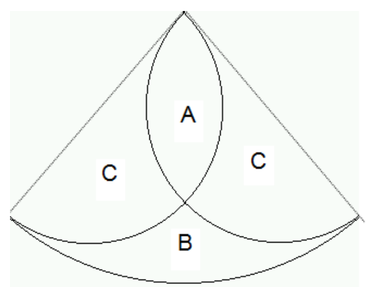
Problème 131



On veut planter 324 arbustes sur un terrain rectangulaire ABCD, de longueur 140 m et de largeur 32 m, de façon à former un quadrillage régulier de carrés.

Quelle doit être la distance entre deux rangées consécutives ?

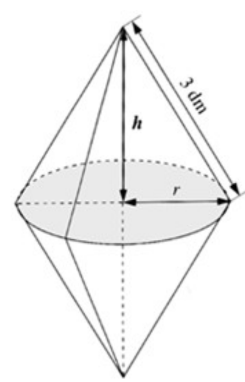
Problème 132



Le logo ci-contre est constitué par deux demi-cercles et par un quart de cercle.

Comparer l'aire des domaines A et B

Problème 133



Une bouée ayant la forme d'un double cône doit être construite au moyen de deux secteurs circulaires plans métalliques, de rayon 3 dm (unité choisie le dm). On désigne par h la hauteur du cône et par r son rayon de base. On fixe la longueur de sa génératrice à 3 dm. On se propose de déterminer ses dimensions pour que le volume de la bouée soit maximal et donc de retrouvé ce volume.

Problème 134

Un camion doit faire un trajet de 150 km.

Sa consommation de gasoil est de $\left(6+\frac{v^2}{300}\right)$ litres par heure, où v désigne sa vitesse en km/h.

Le prix du gasoil est de 1,2 € le litre et on paie le chauffeur 10,5 € par heure.

Quelle doit être la vitesse du camion pour que le prix de revient de la course soit minimal ? Quel est alors ce prix de revient ?

Problème 135 Petit problème de vitesses

Un piéton va de A à B en passant par le sommet S. Sa vitesse en montée est de 4 km/h. Sa vitesse en descente est de 6 km/h.

Sachant que pour aller de A à B il met 4 h 20 min et que pour aller de B à A il met 4 h, calculer AS et SB

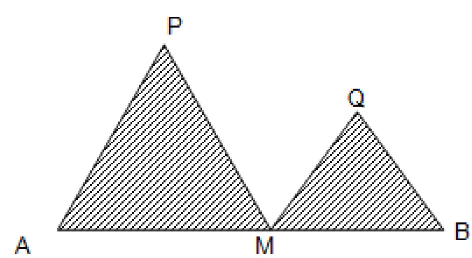
Problème 136

Soit [AB] un segment de longueur 4cm.

A tout point M du segment [AB] on associe les triangles équilatéraux AMP et BMQ

Déterminer la position de M pour que l'aire hachurée soit minimale.

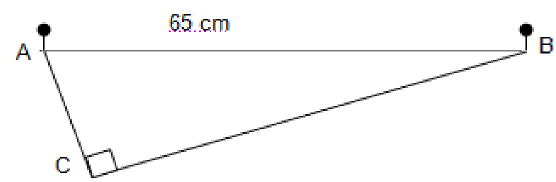
On veut que l'aire soit supérieure à $\frac{17\sqrt{3}}{8}$.



Problème 137

Une ficelle, d'une longueur L en cm, est fixée à ses extrémités par des clous A et B distants de 65cm.

Objectif: *déterminer s'il est possible de tendre la ficelle de façon que le triangle ACB soit rectangle en C.*



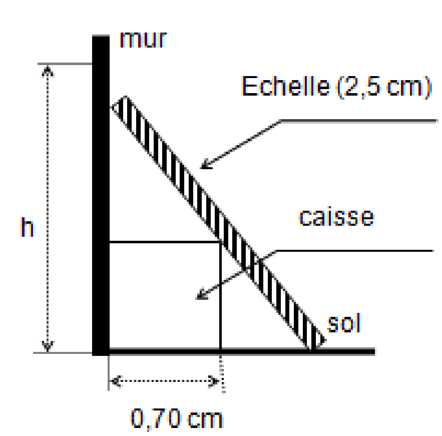
Problème 138

Une caisse cubique de 0,70 m d'arête est posée contre un mur.

On monte à cet endroit, contre le mur, une échelle de 2,50 m de longueur (en contact avec l'arête supérieure de la caisse).

Quelle est la hauteur h ?

[conjecture géogebra](#)*(stage St Domingue)*



Problème 139

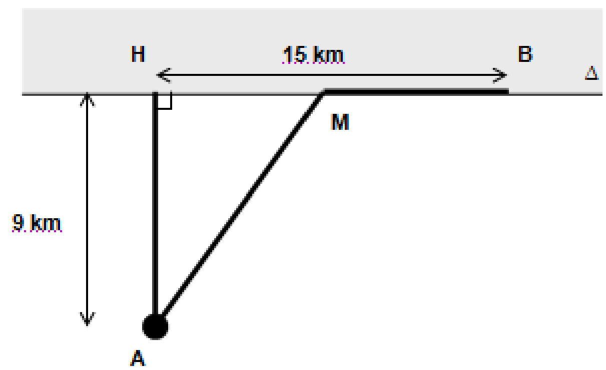
Une cuve contient 300 litres. Le robinet d'eau chaude qui l'alimente a un débit de 15 litres par minute. Si on ouvre simultanément ce robinet d'eau chaude et le robinet d'eau froide, on met 18 minutes de moins à remplir la cuve que si le robinet d'eau froide est ouvert seul. Quel est le débit du robinet d'eau froide ?

Problème 140 Le chemin le plus court n'est pas toujours la ligne droite

Pour des raisons obscures, le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible la maison côtière (point B).

Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h.
La côte est supposée rectiligne (droite Δ).

Où doit-il accoster pour que le temps de parcours soit minimal, et quel est alors le temps de parcours ?



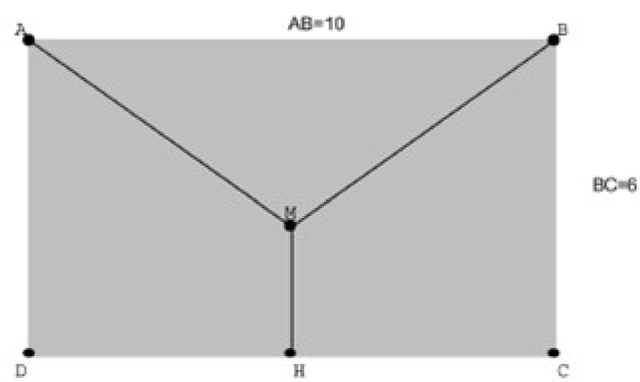
Problème 141

On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluies pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.

On donne ci-dessous le plan de cette façade ainsi que quelques dimensions, exprimées en mètre.

Sur ce plan :

- ✓ [AM] et [BM] représentent les deux premiers tuyaux
- ✓ [MH] représente le troisième tuyau
- ✓ (MH) est la médiatrice de [DC].

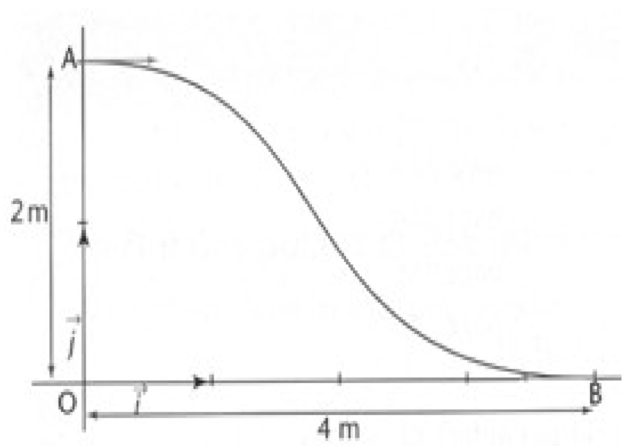


On souhaite trouver la position du point M sur la façade de cette maison qui permet de minimiser la longueur des tuyaux à acheter et donc la dépense à effectuer.

Problème 142 Le toboggan

On veut réaliser un toboggan pour les enfants, qui se termine en pente douce.
Il doit donc vérifier les conditions suivantes :
(1) Il doit avoir une tangente en A parallèle au sol.
(2) Il doit être tangent au sol au point B.
Dans tout le problème, on considère le plan rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité graphique : 2,5 cm) comme l'indique le croquis ci-contre. (Ce croquis ne respecte pas l'échelle choisie).

Les coordonnées du point A sont donc (0 ; 2) et celles du point B sont (4 ; 0).
Le but du problème est de trouver des fonctions dont les courbes représentatives ont l'allure du toboggan et vérifient les conditions de l'énoncé.



Problème 143

Dangereux... Un touriste se déplace dans un métro en utilisant un tapis roulant de 300 m de longueur dont la vitesse de translation est de 4 km/h. Il envisage de réaliser la performance suivante : notant A et B les extrémités du tapis, il parcourt ce tapis de A vers B dans le sens du déplacement du tapis puis de B vers A sans s'arrêter, sa vitesse restant constante. Le retour en A a lieu 10 min 48 sec après le départ de A.

Quelle est la vitesse du touriste ?

Problème 144

Géométrique...Inscrire dans un demi-cercle de diamètre [AB] un trapèze isocèle AMNB de manière que la somme des bases (AB+MN) soit égale aux 3/2 de la somme des côtés non parallèles.

Problème 145

Un cycliste va de A vers B en franchissant un col C puis revient. Sa vitesse moyenne en montée est de 10 km/h et en descente de 30 km/h. Pour se rendre de A à B , il met 1 heure exactement. Pour aller de B vers A, il met 1 h 40 mn.

Quelle est la distance entre A et B ?

Problème 146

Bateau Un bateau descend une rivière sur une distance de 26,5 km puis la remonte sur 22,5 km. Le voyage dure 8 heures. Quelle est la vitesse propre du bateau sachant que la vitesse du courant est de 2,5 km par heure ?

Problème 147

Soit G un cercle de centre O(3,1) et de rayon $\sqrt{5}$ et A le point de coordonnées (4,3). Déterminer l'équation de la tangente à G passant par A.

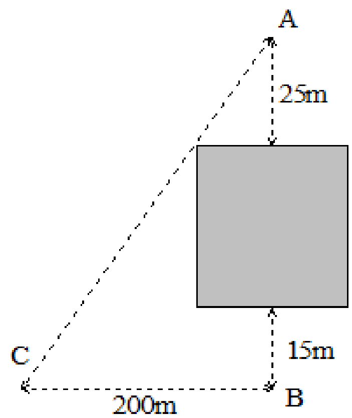
Problème 148

Les villes chinoises étaient construites sur un plan carré. Les portes orientées aux quatre points cardinaux étaient au milieu des côtés. Dans la ville de Ki-Ai-Tou-Mou, on ne connaissait pas le côté de la ville. Mais le célèbre mathématicien Conton-Juska-Dice s'aperçut qu'en se plaçant en A, on voyait jusqu'à B, et qu'en se plaçant en C on voyait jusqu'en A en frôlant le coin de la ville.

L'angle ABC est rectangle, les longueurs connues sont indiquées sur la figure.

Saurez vous trouver le côté de la ville ?

autre énoncé et fichier geogebra de conjecture. (N. Cosme, stage St Domingue)



Problème 149

Une boîte parallélépipédique à base carrée, d'un volume de 64 dm^3 est construite dans un matériau qui revient à 3 centimes le cm^2 pour le fond et le couvercle et à 2 centimes le cm^2 pour la surface latérale.

Quelles doivent être les dimensions de cette boîte pour que son coût de revient soit minimum ?

Problème 150

D'après la théorie de la relativité, une particule de masse m_0 au repos a une masse m à la vitesse v donnée par la formule $m(v)=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ où c est la vitesse de la lumière soit 300 000 km/s.

On prendra $m_0 = 1$ pour les calculs et les figures.

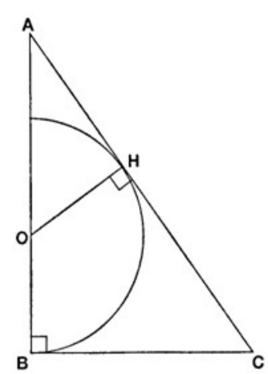
Pour quelle vitesse la masse vaut-elle deux fois la masse au repos ? A partir de quelle vitesse un individu verra t-il son poids augmenter de 1% ?

décrire l'évolution de la masse.

Problème 151 Volume d'un cône

Dans la figure ci-contre, on considère un triangle ABC rectangle en B .Le demi-cercle de centre O a pour rayon 1 ; la droite (BC) est tangente en H au demi-cercle ; la droite (AC) est tangente en H au demi-cercle.

En pivotant autour de (AB), le triangle ABC engendre un cône de révolution de sommet A
Donner la valeur de l'angle $\widehat{BAC}$ pour lequel le volume du cône est minimum.



Problème 152

On laisse tomber une balle d'une hauteur de 1 mètre. A chaque rebond elle rebondit des 3/4 de la hauteur d'où elle est tombée.

A quel rebond la hauteur atteinte est elle inférieure à 10^{-12} mètre ? Quelle est alors la distance parcourue par la balle ?

Problème 153

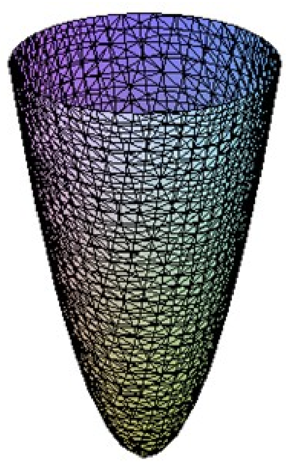
En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 23% de son intensité lumineuse.

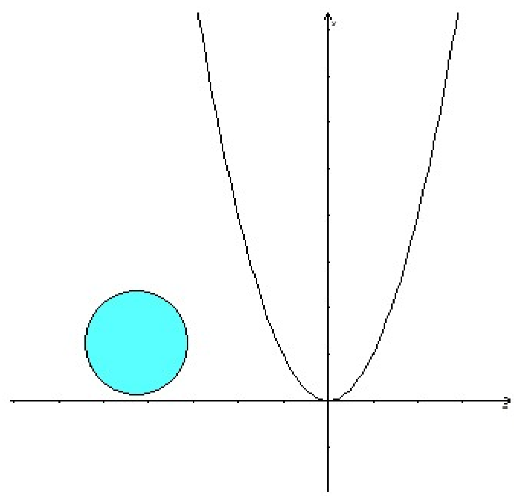
On superpose *plusieurs* plaques de verre identiques

1) Quelle est l'intensité initiale d'un rayon dont l'intensité après avoir traversé 4 plaques est égale à 15 ?
2) Calculer le nombre minimum de plaques qu'un rayon doit avoir traversé pour que son intensité sortante soit inférieure ou égale au quart de son intensité entrante ?

Problème 154 Chute des corps (Olympiades académiques 2007)

Une urne a la forme d'un paraboloïde de révolution de hauteur 9 cm. La section de ce paraboloïde par un plan passant par son axe est la parabole dont une équation dans un repère orthonormal bien choisi est $y = x^2$.





1. On fait tomber dans l'urne une bille sphérique B de rayon 0,1 cm. La bille va-t-elle toucher le fond de l'urne ?
2. On fait tomber dans l'urne une seconde bille sphérique B' de rayon 1 cm. La bille B' va-t-elle toucher la bille B ?

Problème 155 Les classes de première (Olympiades académiques 2008)

Dans un lycée, les classes de première sont numérotées ainsi : $1^{\text{ère}}$ 1, $1^{\text{ère}}$ 2 …et ainsi de suite.

Pour n'importe quelle classe, sauf pour la dernière, si on ajoute deux fois le nombre d'élèves de cette classe au nombre d'élèves de la classe suivante, on trouve 64. (Propriété *P*).

Le nombre de classes de première de ce lycée est le plus grand vérifiant la propriété *P*.

Quel est le nombre de classes de première de ce lycée ?

Combien y a-t-il alors d'élèves en $1^{\text{ère}}$ 1 ?

Problème 156

Trois joueurs font une partie de poker. Quand un joueur perd, il double la mise de chacun des autres joueurs. Ils jouent trois parties et chacun en perd une. A la fin de ces trois parties, chacun se retrouve avec 400 €. De combien disposait chaque joueur au départ ?

Problème 157

Quel est le développement décimal du carré du nombre rationnel dont le développement décimal illimité est 1,001 001 001 ... ?

Prolongement : les nombres de chiffres des périodes de a et de a^2 laissent à penser que si n est un rationnel dont l'écriture décimale illimitée à une période de k chiffres, et si p est un entier naturel, alors $\frac{n}{p}$ a une écriture décimale illimitée dont la période a un nombre de chiffres au plus égal à kp.

http://artic.ac-besancon.fr/mathematiques/pb-1001carre/index.htm

Problème 158

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt[4]{41+x}+\sqrt[4]{41-x}=4$ (poser $A^4 = 41 + x$, $B^4 = 41 - x$).

Problème 159 manuel scolaire Hongrois « matematikai fogalmak, tételek » (Hajnal Imre,Szeged, 1997)

On note u_n la somme des entiers de 1 à n , et v_n la somme des carrés des entiers de 1 à n

- Observer et étudier la suite des quotients $w_n = \frac{v_n}{u_n}$
- Peut-on en déduire l'expression de v_n en fonction de n?

Problème 160

Le produit de quatre entiers consécutifs augmenté de 1...

Problème 161 diamètres conjugués

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la parabole P d'équation $y=1{,}5\ x^2$ et une droite d de coefficient directeur 2.

Lorsque la droite d varie dans le plan , où se trouvent les milieux des points d'intersection de P et de d ?

Problème 162 diamètres conjugués

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère l'hyperbole H d'équation $x \cdot y=1$ et une droite d de coefficient directeur -2.

Lorsque la droite d varie dans le plan , où se trouvent les milieux des points d'intersection de P et de d ?

Un peu de culture mathématique ...

La propriété explorée et étudiée dans ce travail est classique : quand on coupe une conique par des droites parallèles à une direction donnée, les milieux des cordes d'intersection sont alignés sur une autre droite. C'est vrai de façon élémentaire lorsque la conique est dégénérée en deux droites parallèles ou sécantes, ou bien dans le cas du cercle. C'est encore vrai dans le cas général, c'est à dire pour la parabole, l'hyperbole et l'ellipse.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnent les directions de la droite d'où on est parti et de la droite où se trouvent les milieux, ces directions jouent des rôles symétriques : si on recoupe la conique par des droites de vecteur directeur $\vec{v}$, les milieux des cordes d'intersection sont alignés sur une droite de vecteur directeur $\vec{u}$. On dit que ces directions sont "conjuguées" par rapport à la conique. Dans le cas du cercle, les directions conjuguées sont orthogonales.

Enfin l'ensemble des milieux s'appelle un "diamètre" de la conique : cela généralise aux coniques la notion de diamètre du cercle. Dans toute conique, on aura donc des paires de diamètres conjugués, d'où le titre de cette activité.

Problème 163

L'objectif de ce travail est d'étudier comment on peut « ajuster » une formule à des données.

On suppose qu'à la suite d'une expérience, on a obtenu les valeurs suivantes pour deux grandeurs x et y, entre lesquelles on cherche une relation $y = f(x)$

x	0	1	2	3	4
y	14	7	5	4	6

Problème 164

La plus simple des vibrations est l'oscillation sinusoîdale:

Elle est décrite mathématiquement par une fonction du type $x \rightarrow A \sin(\omega x + \varphi)$

Le nombre A est positif: c'est l'amplitude de la vibration

Le nombre ω est sa pulsation, qui donne sa fréquence, et l'angle φ est son déphasage.

L'objectif de ce travail est d'étudier la somme de deux vibrations simples et de même fréquence.

Si a et b sont deux réels positifs, quels sont l'amplitude et le déphasage des vibrations décrites par les deux fonctions $x \rightarrow a \sin x$ et $x \rightarrow b \cos x$? Étudier le phénomène $f(x) = a \sin x + b \cos x$

Problème 165

Dans un repère orthonormé, on considère les points A_n dont les coordonnées $(x_n ; y_n)$ sont définies par:

Pour $n = 0$: $\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 1 \end{cases}$ et pour tout entier n : $\begin{cases} x_{n+1} = 15{,}5 - 1{,}1\ y_n \\ y_{n+1} = 1{,}1\ x_n - 6 \end{cases}$

Où se trouvent les points A_n ?

• Géométrie

Problème 166

Pouvez-vous établir une formule permettant de calculer l'aire S d'un triangle en fonction de ses longueurs ?

Problème 167

d1, d2 et d3 sont trois droites concourantes. Construire un triangle tel que ces trois droites en soient les médianes.

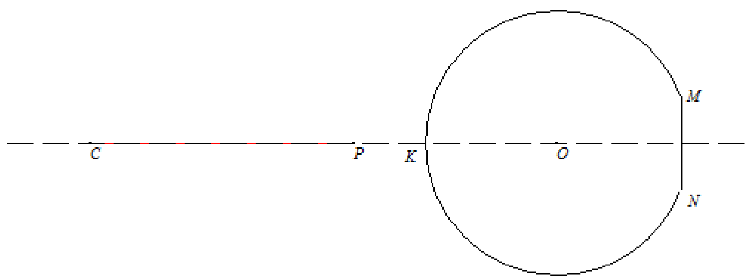
Problème 168 Le Chien et le Visiteur (Olympiades académiques)

En sortant de son phare le gardien a laissé la porte ouverte, mais il a laissé son chien *C* (féroce, voir sa photo plus bas) attaché à un piquet *P* situé à 2m du pied *K* du phare avec une chaîne *PC* de 10 m, à l'opposé de la porte dont l'ouverture *MN* mesure 1 m de large.

Je connais bien le gardien mais malheureusement le chien ne me connaît pas.

Vais je pouvoir entrer pour attendre mon ami ?

Le rayon de la base circulaire du phare est 3 m.



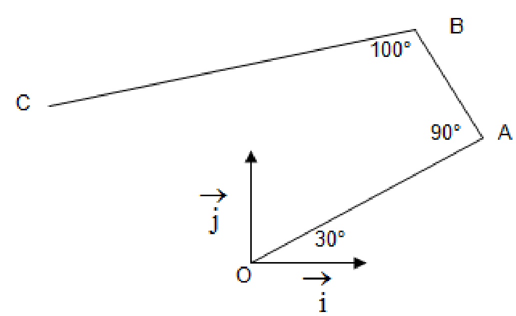
fichier ggb conjecture

Problème 169

Le repère étant orthonormé,

on donne OA = 4, AB = 2,5 et BC = 7

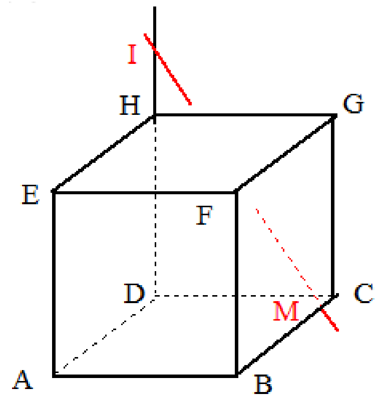
Donner la position de C en coordonnées cartésiennes, puis en coordonnées polaires.



Problème 170

On considère un point I fixé de l'arête (DH) du cube et un point M de [BC] (voir figure ci-contre).

Donner une construction du point d'intersection M' de (IM) et de la face EFGH.



Problème 171 La grande verrière des magasins du Louvre

Le but de cet exercice est de calculer des aires pour obtenir un prix de revient de vitrage

Dans le cadre de la rénovation de l'immeuble des grands magasins du Louvre, situé au cœur de Paris et classé monument historique, un ensemble de quatre verrières a été réalisé pour couvrir les quatre cours intérieures.

Les deux figures représentent une partie de la grande verrière.

Les dimensions sont données en millimètres

On donne, -la cote du point E : 1350 mm

-la cote du point C : 1800 mm

- A, B et D ont une cote nulle

FIG. 62

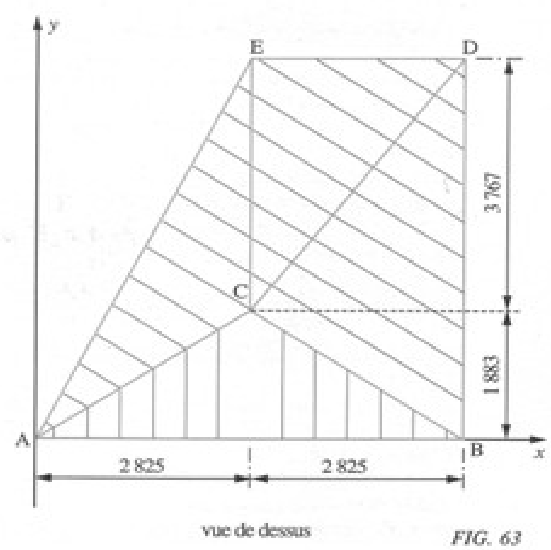


FIG. 63

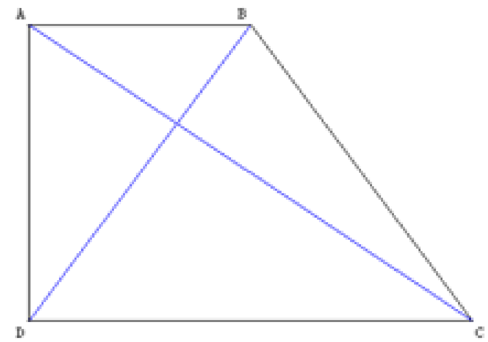
Problème 172

Soit la sphère S de centre A(2;5;0) et de rayon 2 et la sphère S' de centre B(7;3;0) et de rayon 3.

Les sphères S et S' sont-elles sécantes ?

Problème 173 Trapèze rectangle

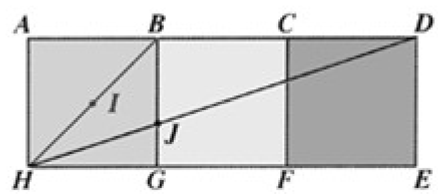
ABCD est un trapèze rectangle en A et D tel que la petite base AB = a, la grande base DC = $2a$ et la hauteur AD = h.



ABCD est un trapèze rectangle en A et D tel que la petite base AB = a, la grande base DC = $2a$ et la hauteur AD = h.

Trouver en fonction de a la valeur h pour laquelle les diagonales [AC] et [BD] sont orthogonales.

Problème 174 Les trois carrés

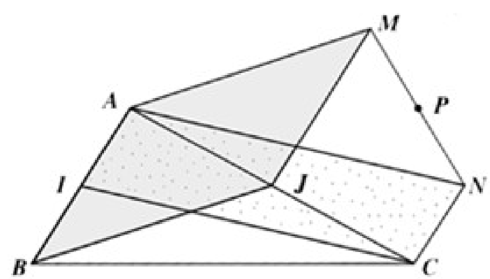


La figure ci-contre représente trois carrés accolés.

Les droites (DH) et (BG) se coupent en J et I est le milieu de [BH].

I, J et F sont-ils alignés ?

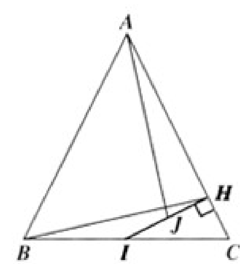
Problème 175



Dans la figure ci-après, I et J sont les milieux de [AB] et [AC], ABJM et CIAN sont des parallélogrammes et enfin P est le milieu de [MN].

(AP) et (BC) sont-elles parallèles?.

Problème 176

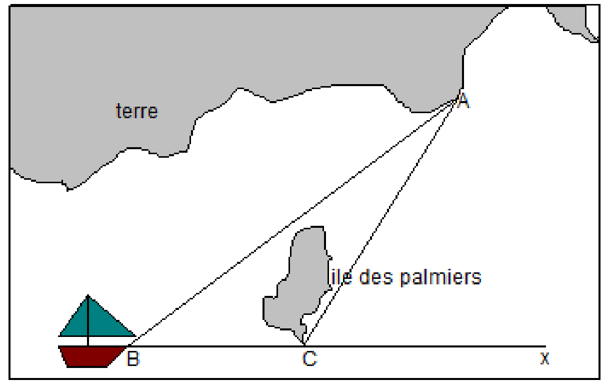


Le triangle ABC est isocèle de sommet A, I est le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de I sur (AC).

On désigne par J le milieu de [IH].

Montrer que les droites (AJ) et (BH) sont orthogonales.

Problème 177



Un bateau avance à 24 km/h. Pour aller de B en A, il devra passer par C car la profondeur

est insuffisante entre la terre et l'île. A 8 heures il passe en B et le capitaine trouve BAC = 32°.

A 8heures 20 mn le bateau arrive en C. Juste avant de virer vers A le capitaine mesure $\widehat{ACx}$ et trouve 57°.

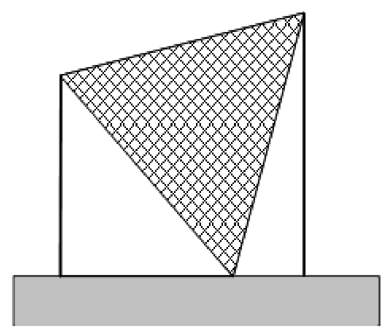
A quelle heure le bateau arrivera-t-il en A ?

Problème 178 Diophante.fr D102

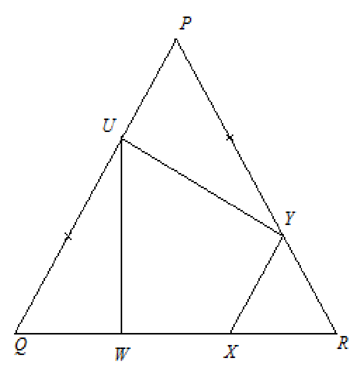
On considère un triangle ABC quelconque. Soit un point P non situé sur les côtés du triangle. On prend le milieu M_1 de AP puis M_2 le milieu de BM_1 puis M_3 le milieu de CM_2 puis M_4 le milieu de AM_3 …. Où se placent les points M_n quand on répète l'opération une infinité de fois ?

Problème 179 Le drapeau triangulaire.

Un grand drapeau de la forme d'un triangle équilatéral est suspendu par deux de ses coins au sommet de mats verticaux de 3 et 4 mètres de haut. Le troisième coin affleure exactement au sol. Quelles sont les dimensions exactes de ce drapeau ?



Problème 180 Aire d'un quadrilatère

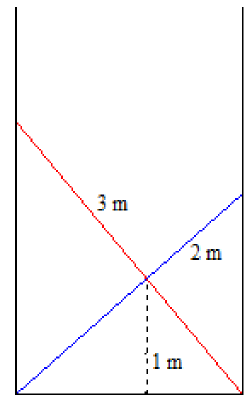


PQR est un triangle équilatéral, on divise chaque côté en trois parties égales. Évaluer $\frac{aire(UWXY)}{aire(PQR)}$.

Problème 181 Le Couloir

Deux échelles de 2 mètres et 3 mètres de long se croisent dans un couloir.
Le point d'intersection est à 1 mètre du sol.

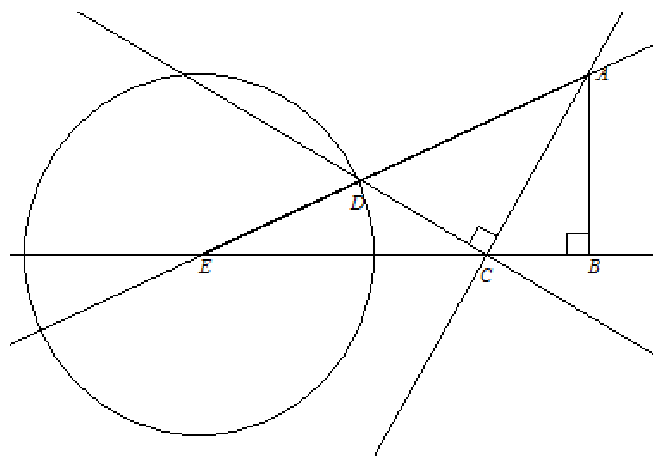
Quelle est la largeur du couloir ?



Problème 182

On connaît CB=1/2, AB = 1, ED = 1 .

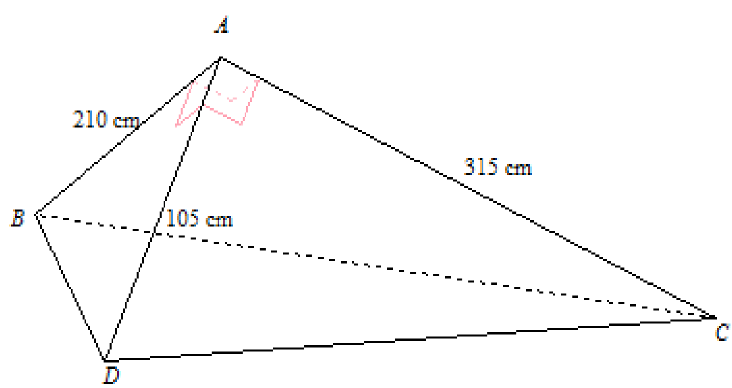
Combien vaut AD ?



Problème 183 **Diophante.fr D306 / Donald B. Eperson – Revue Symmetry Plus n°10 Automne 1999**

Pour aller camper sur les bords du Nil, Diophante s'est équipé d'une tente montée sur trois tiges AB, AC et AD qui ont respectivement pour longueurs 210 cm, 315 cm et 105 cm. Les trois tiges reposent sur le sol en B, C et D et sont perpendiculaires entre elles au sommet de la tente.

Quelle est la hauteur de cette tente ?



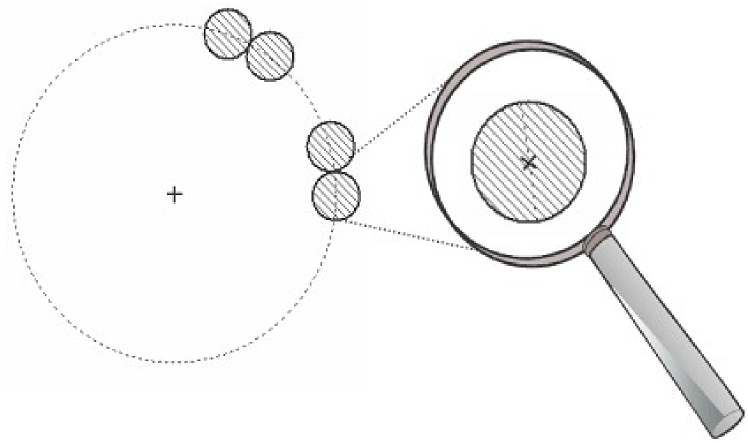
Problème 184 Le collier de perles (Olympiades académiques 2007)

Un collier est composé de *n* perles de rayon *r*.

Hypothèse : il y a suffisamment de perles pour que l'on puisse schématiser le collier comme la figure ci-dessous et donc considérer que la longueur de fil du collier (représenté en pointillés) nécessaire pour chaque perle est égale à 2*r*.

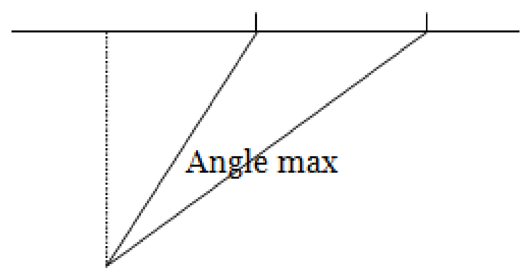
Calculer alors le rayon R du collier en fonction de *n* et *r*.

Que pensez-vous de la validité de l'hypothèse choisie ci-dessus quand n = 10 ; quand n = 20 ?

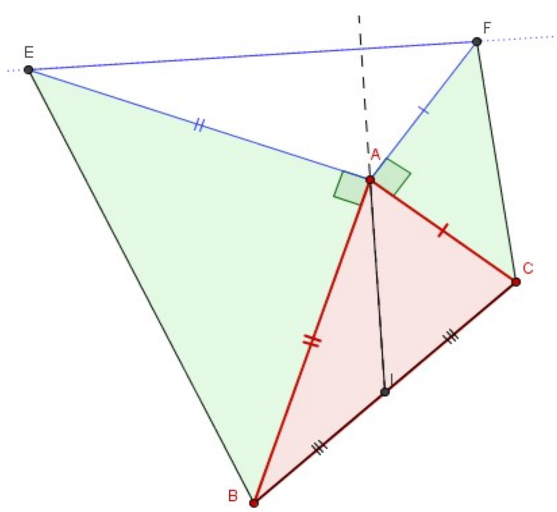


Problème 185

Au rugby après le marquage d'un essai le buteur doit se placer à une certaine distance de la ligne de but et tirer entre les poteaux. Quel est le lieu des points du terrain où l'angle de tir est maximal ?



Problème 186 Stage St Domingue



Sans énoncé !

***Commentaires** : exploitable en 5ème avec les angles*
en 1ère S avec le produit scalaire
en T^{ale} S avec les complexes

• Probabilité

Problème 187

Lors d'une kermesse, une association organise un jeu de la manière suivante :

Sur une table se trouvent trois chapeaux contenant chacun une boule blanche et une boule noire.

Le joueur mise 1 € puis tire une boule dans le premier chapeau. S'il tire la boule noire il a perdu et le jeu s'arrête.

S'il tire la boule blanche il gagne 1 € et continue en tirant une boule du deuxième chapeau.

S'il sort la boule noire il s'arrête, s'il sort la boule blanche il gagne 1 € de plus et continue en tirant une boule du troisième chapeau.

S'il tire la boule noire il s'arrête (avec son gain de 2 €), s'il tire la boule blanche il gagne encore 1 € de plus.

1. A l'aide d'un tableur simulez 100 puis 1000 parties. Le jeu a-t-il l'air rentable pour l'association ?

2.Pour que le jeu rapporte plus à l'association le président affirme qu'il faut enlever un chapeau alors que le trésorier prétend qu'il faut en ajouter un. Qui a raison ?

Simulez 1000 parties de ces deux expériences avec un tableur.

3.Calculer l'espérance de gain pour l'association dans chacune des trois situations.

Le document réalisé avec un tableur sera imprimé, vous fournirez aussi la feuille sue laquelle vous avez calculé les espérances de variables aléatoires.

Commentaires: Éclaircissements préalables au tableau, à la demande des élèves, sur la fonction :

SI(test_logique ; valeur SI_vrai ; valeur SI_faux)

Problème 188

Une association projette d'organiser une loterie auprès du public. Le billet est à 3 €. Deux solutions sont envisagées :

Formule A			
Gain du joueur	0	10	100
% de billet	94%	5%	1%

Formule B				
Gain du joueur	0	10	20	40
% de billet	91,25%	5%	2,5%	1,25%

Comparer et commenter.

L'association pense pourvoir vendre 2 000 billets, ses frais s'élèvent à 900€ : quel bénéfice peut-elle espérer ?

Problème 189

Dans une urne se trouvent cinq boules indiscernables au toucher, deux vertes et trois rouges.

On retire au hasard les boules l'une après l'autre jusqu'à ce que les boules qui restent dans l'urne soient de la même couleur.

1.Réaliser l'expérience avec une urne ou une simulation

2.On définit la variable aléatoire X égale au nombre de tirages nécessaire.

Vérifier les résultats obtenues par la simulation.

Problème 190

Un jeu consiste à lancer 2 dés équilibrés:
pour gagner, la somme des numéros doit être supérieure ou égale à 8.

Réaliser un programme sur algobox permettant d'afficher le pourcentage de parties gagnées pour N lancers.

Commentaires:

Les mathématiciens ont établi que lorsque la probabilité d'une expérience p est comprise entre 0,3 et 0,7 (c'est à dire entre 30% et 70%) alors, si l'on procède par échantillon de n expériences (n ≥ 30), dans environ 95% des cas le taux de réussite que l'on observe est dans l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Les résultats obtenus leur donnent-ils raison ?

Ils ont aussi montré que si l'on procède à des séries de n lancers (n ≥ 30), alors l'écart type des taux observés de réussite est donné par : $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$:

Autre situation: On lance 6 fois un dé: pour gagner il ne faut pas obtenir de n° 6.

Problème 191

Une machine à sous, 4 fruits équiprobables sur 4 rouleaux. Pour gagner il faut quatre fruits distincts : on gagne alors 10 fois sa mise. Le jeu est-t-il favorable au joueur ?

Problème 192

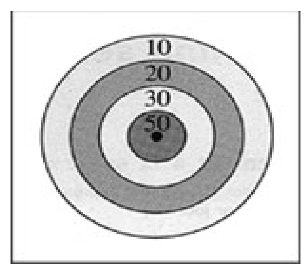
Étude expérimentale du lancer de 4 pièces - Simulation sur Tableur-

On lance en même temps 4 pièces de 1 € et on compte le nombre de pièces présentant le côté **pile.**

Étudier cette variable aléatoire.

Problème 193

Deux tireurs *X* et *Y* s'affrontent en vue d'une sélection lors d'une épreuve comportant vingt tirs sur cible. Les résultats obtenus sont les suivants :



	50	30	20	10	0
X	4	6	5	4	1
Y	6	3	5	3	3

départager les deux tireurs en argumentant.

Problème 194

On considère un jeu de trois dés non truqués: Le dé A a ses faces marquées 1, 4, 8, 13, 14, 17

Le dé B a ses faces marquées 2, 5, 9, 10, 15, 16 Le dé C a ses faces marquées 3, 6, 7, 11, 12, 18

Deux joueurs prennent chacun un dé et le lancent, le vainqueur est celui qui obtient le plus grand nombre:

a. Le premier joueur choisit le A et le second le B: quel est celui qui a le plus de chance de gagner ?

b.Même question avec les dés B et C .Même question avec les dés A et C . Conclusion ?

Problème 195

On joue avec un dé pipé à six faces numérotées de 1 à 6.

Soit A : "Il sort un nombre pair" et B : "Il sort un nombre impair", nous avons $P(A)=\frac{3}{4}P(B)$ (avec équiprobabilité entre les numéros pairs et également équiprobabilité entre les numéros impairs).

1. Calculer la probabilité d'obtenir 1, 2 ... 6.

2. Soit X la variable aléatoire "Numéro sorti". Calculer l'espérance mathématique de X.

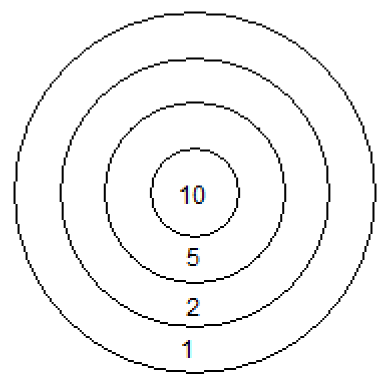
Problème 196

Une étude des fichiers de la Sécurité Sociale concernant une région, montre qu'en 1990, 17% des personnes de moins de 70 ans ainsi que 75% des personnes âgées de 70 ans ou plus ont été vaccinées contre la grippe. On sait que les personnes de 70 ans ou plus représentent 12% de la population de cette région.

On choisit 10 personnes de moins de 70 ans au hasard. Calculer la probabilité pour que trois d'entre elles exactement soient vaccinées.

Problème 197

Un joueur lance des fléchettes sur une cible circulaire formée de 4 régions marquées 1, 2, 5 et 10.



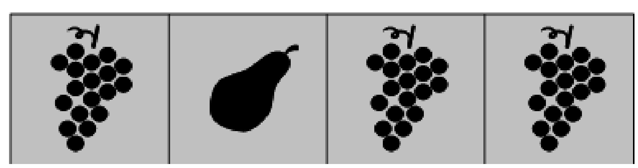
Nous admettons que la probabilité que le joueur atteigne la cible est de 0,6 et que la probabilité d'atteindre la région *i* est inversement proportionnelle à *i*.

Si le joueur atteint la région *i*, il marque *i* points et 0 point s'il n'atteint pas la cible.

Le joueur lance trois flèches de suite. Quelle est la probabilité qu'il marque au moins 25 points ?
Combien de points peut-il espérer marquer avec trois lancers?

Problème 198 Bandit manchot

Dans une salle de jeux, un appareil comporte 4 roues, chacune portant à sa périphérie 8 images de fruits différents : Ananas, Bananes, Cerises, Dattes, Fraises, Groseilles, Poires, Raisins



Une mise de 1 € déclenche le fonctionnement de l'appareil pour une partie. Chacune des 4 roues affiche au hasard dans une fenêtre un de ces fruits.

On admettra que tous les événements élémentaires sont équiprobables.

Certains résultats permettent de gagner de l'argent:

50 € pour 4 fruits identiques ; 5 € pour 3 fruits identiques ; 1 € pour 4 fruits distincts ; 0 € pour les autres résultats.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque résultat associe le gain indiqué. Calculer l'espérance mathématique de X.

Problème 199 La chauve-souris (inspiré du sketch de J.M. Bigard…)

Une porte est munie d'un clavier portant les touches 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D.

La porte s'ouvre lorsqu'on frappe dans l'ordre 3 chiffres et 2 lettres qui forment un code. Les chiffres sont distincts, les lettres peuvent être identiques. On suppose dans tout l'exercice que les manipulateurs connaissent le mode d'emploi du dispositif.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une chauve-souris ouvre la porte au 1er essai si :

a. Elle ignore le code.

b. Elle se souvient seulement que les 3 chiffres du code sont pairs.

c. De plus, elle se souvient que les deux lettres sont identiques.

2. La porte est équipée d'un système d'alarme se déclenchant lorsqu'aucun des 3 chiffres tapés ne fait partie du code. Une chauve-souris ignorant le code tente de déclencher l'alarme.

a. Quelle est la probabilité pour qu'elle provoque l'alarme au premier essai.

b. Elle effectue 4 essais successifs et indépendants. Quelle est la probabilité pour qu'elle déclenche l'alarme au moins une fois au cours des 4 essais ?

Problème 200

Une entreprise de location de voitures relève dans sa comptabilité les frais de réparation des pannes d'origine mécanique et ceux de remise en état de la carrosserie.Elle a observé que, pour une voiture louée une semaine :

la probabilité de panne mécanique est 0,32,

la probabilité de dégâts à la carrosserie est 0,54.

D'autre part la probabilité pour qu'une voiture ayant une panne mécanique présente également des dégâts à la carrosserie est de 0,45.

1.Calculer la probabilité pour qu'une voiture louée pendant les cinquante deux semaines d'une année n'ait ni panne mécanique, ni dégâts à la carrosserie pendant exactement vingt six semaines.

2.Pour une voiture louée une semaine, les frais s'élèvent en moyenne à :

300 € en cas de panne mécanique,

500 € en cas de dégâts à la carrosserie.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le montant moyen en euros des frais hebdomadaires pour une voiture.

Calculer l'espérance mathématique de X.

Problème 201

Parmi quinze appareils, quatre sont destinés à l'outremer et ont été "tropicalisés". L'ouvrier chargé de l'empaquetage a oublié d'étiqueter de manière distincte les appareils "tropicalisés".

Il a devant lui quinze paquets identiques et doit retrouver les quatre appareils "tropicalisés". Ils les ouvre jusqu'à ce qu'il ait obtenu les quatre.

1. Il ouvre quatre paquets. Quelle est la probabilité pour qu'il retrouve les quatre appareils "tropicalisés" ?

2. Quelle est la probabilité pour qu'il soit obligé d'ouvrir au moins cinq paquets ?

Problème 202

Un match de football doit opposer dimanche l'équipe des *Joyeux démolisseurs* à celle des *Artistes inconscients*. Par temps sec, la probabilité de victoire des *Artistes inconscients* est 0,6. Par temps de pluie elle tombe à 0,3. Hélas pour les *Artistes*, le match se déroule à Londres et la probabilité pour qu'il pleuve dimanche est de 0,9 (seulement 0,9 car c'est la saison sèche en Angleterre).

Quelle est la probabilité de victoire pour les *Artistes inconscients* ?

En fait on apprend en lisant le journal le lundi, que les *Artistes inconscients* ont gagné le match. Quelle est la probabilité pour qu'il est plu le dimanche ?

source concernant ce thème et ce niveau :

site frédéric Laroche

sources concernant ce niveau:

- recherche-formation IREM Toulouse   très intéressant, cela peut donner des idées de gestions, d'évaluations...

- site frédéric Laroche

d) Économique et sociale et Littéraire option maths (et oui! c'est le même programme!)

programmes ES et L à partir de 2011 - 2012

Objectif général

Outre l'apport de nouvelles connaissances, le programme vise le développement des compétences suivantes :
– mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
– mener des raisonnements ;
– avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
– communiquer à l'écrit et à l'oral.
…..

Utilisation d'outils logiciels

L'utilisation de logiciels, d'outils de visualisation et de simulation, de calcul (formel ou scientifique) et de programmation change profondément la nature de l'enseignement en favorisant une démarche d'investigation.
En particulier, lors de la résolution de problèmes, l'utilisation de logiciels de calcul formel peut limiter le temps consacré à des calculs très techniques afin de se concentrer sur la mise en place de raisonnements.
L'utilisation de ces outils intervient selon trois modalités :
– par le professeur, en classe, avec un dispositif de visualisation collective ;
– par les élèves, sous forme de travaux pratiques de mathématiques ;
– dans le cadre du travail personnel des élèves hors de la classe.

Diversité de l'activité de l'élève

Les activités proposées en classe et hors du temps scolaire prennent appui sur la résolution de problèmes essentiellement en lien avec d'autres disciplines. Elles enrichissent la culture scientifique dans différents domaines : historique, économique, artistique, etc. De nature diverse, elles doivent entraîner les élèves à :
– chercher, expérimenter, modéliser, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
– choisir et appliquer des techniques de calcul ;
– mettre en oeuvre des algorithmes ;
– raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
– expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit.

- ## algèbre - analyse

Le programme s'inscrit, comme celui de la classe de seconde, dans le cadre de la résolution de problèmes.
Les situations proposées répondent à des problématiques clairement identifiées d'origine purement mathématique ou en lien avec d'autres disciplines.
Un des objectifs de ce programme est de doter les élèves d'outils mathématiques permettant de traiter des problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus ou discrets.

Problème 203

Une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'objets. Chaque objet est vendu 100 €.

Le coût de production unitaire *U(x)* exprime le coût de production par objet produit. On a déterminé qu'il est égal à
$U(x)=x-10+\dfrac{900}{x}$

Quel est le bénéfice maximal ?

Problème 204

Dans un aérodrome, un gyrophare est placé au-dessus d'un hangar cylindrique de 10 m de haut et de base circulaire de 40 m de diamètre. Le cône d'ombre est un cercle de rayon x et on veut déterminer la hauteur h du gyrophare (au-dessus du sol) en fonction de ce rayon.

Modéliser cette situation et Établir le tableau de variation de h en fonction de x.

Problème 205

Un capital de 5 000 € est déposé pendant 7 ans. Sachant qu'il a produit 3 570 € d'intérêts :

quel est le taux d'intérêt annuel si les intérêts sont simples ? si les intérêts composés ?

Problème 206

Quelle somme faudrait-il placer aujourd'hui au taux de 4,5% (composés) pour que le montant total des intérêts acquis en 10 ans soit de 2 000 € ?

Problème 207

Soit un segment [OA] de longueur donnée (par exemple 10) et M un point de ce segment.
Du même côté de [OA], on construit le triangle équilatéral OTM et le carré AMNP.
Pour quelle valeur de x la somme des aires du triangle et du carré est-elle minimum ?

Problème 208

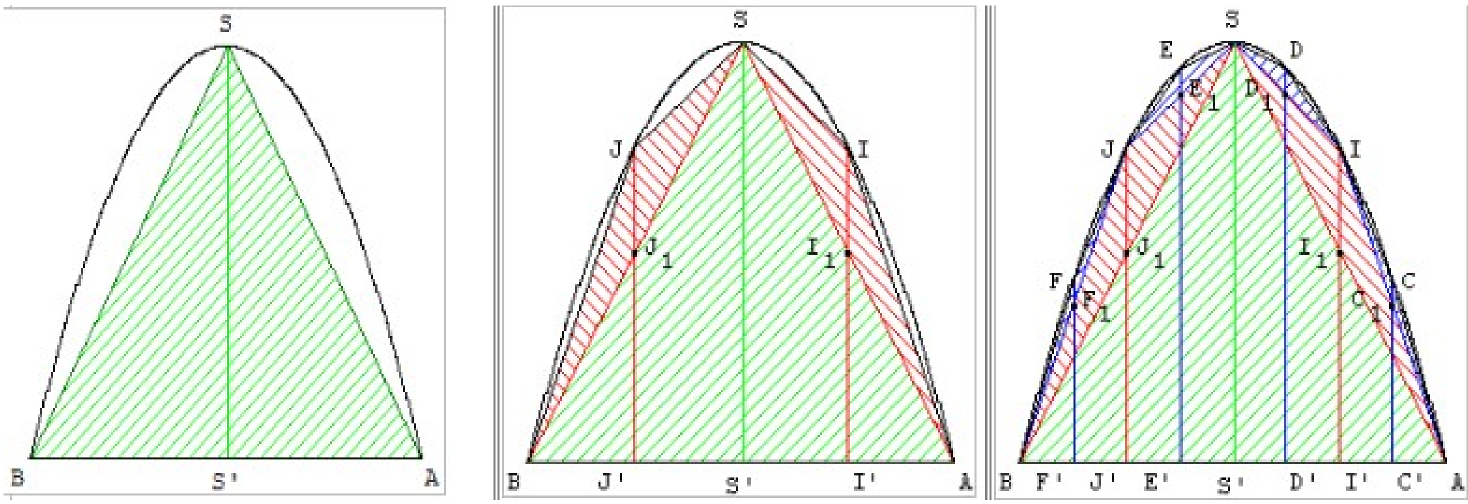
La quadrature de la parabole est le calcul de l'aire d'un segment de parabole, délimité par un arc de parabole et la corde qui le sous-tend.
C'est un des premiers calculs de surface, réalisé par Archimède (287-212 av. J.-C.).

Proposition I du livre de la méthode d'Archimède : l'aire du segment de parabole ASB est $\frac{4}{3}$ de l'aire du triangle ASB.

L'objectif est de calculer l'aire de l'arche sous la parabole, limitée par la courbe et la corde [AB] en utilisant la méthode des triangulations successives.

Voici une présentation du travail d'Archimède pour la parabole représentant la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 4$ (équation loin des préoccupations de l'époque où l'on parlait de section de cône rectangle).

Les figures ci-dessous sont des cas particuliers (base du triangle perpendiculaire à l'axe de la parabole). Le calcul est valable pour le cas général. On pourra modifier la parabole ou le segment [AB].



Le principe de la démonstration d'Archimède est :

– de remplir l'espace entre le triangle ASB et le segment de parabole ASB par des triangles obtenus par dichotomie,
– de parvenir, par des considérations géométriques simples à l'évaluation de l'aire de ces triangles,
– d'établir la conjecture : « l'aire sous l'arche de parabole est ? de l'aire du triangle ASB »,
– de faire la démonstration de cette conjecture par un double raisonnement par l'absurde (dépassant le cadre de la 1L).

Problème 209

Le coût total exprimé en euros, pour une quantité q produite par une entreprise est donné par:
$C(q) = 0{,}005\,q^3 - 2{,}4\,q^2 + 500\,q + 6250$ pour q Î[0 ; 400[

On suppose que toute quantité produite est vendue au prix unitaire de 295 €.

Quel est le coût moyen de fabrication d’une unité pour une fabrication de 200 unités. ?

Quelles quantités faut-il produire pour que le profit soit positif ?

Problème 210

Un capital de 10 000 € a perdu 6% de sa valeur au bout d’un an. Ce capital avait été placé de la manière suivante :

* Une partie a été placée sur un compte d’épargne qui rapporte 5% d’intérêts par an ;

* le reste du capital a été placé en bourse. Un an plus tard, le portefeuille boursier a perdu 20% de sa valeur.

Calculer le montant en euros de chacune des deux parties.

Problème 211

Un assembleur commande deux types de composants électroniques.

- Le composant A est vendu par lot de 30 au prix de 2 550 € le lot.

- Le composant B est vendu par lot de 40 au prix de 1 400 € le lot.

L'assembleur a commandé au total 720 composants pour un montant global de 37 200 €, déterminer le nombre de lots de chacun des composants.

Problème 212

Un automobiliste effectue un trajet entre deux villes. Ce trajet est composé de portions de routes nationales et d'autoroutes. Sur route nationale, son véhicule consomme en moyenne 5,6 L de carburant pour 100 km parcourus, et sur autoroute la consommation est en moyenne de 7,2 L pour 100 km parcourus.

Le trajet est constitué de 80% de routes nationales et pour effectuer la totalité du trajet, il a utilisé 14,8 L de carburant.

Calculer la longueur du trajet.

Problème 213

Les 1500 salariés d'une entreprise sont répartis dans trois services A, B et C. Pour rééquilibrer les effectifs des trois services, il a été décidé que :

* 10% des salariés du service B seront affectés au service C ;
* 5% des salariés du service A seront affectés au service B et 15% au service C.

Après cette restructuration, le nombre de salariés du service B a diminué de 15 personnes et 159 salariés ont été mutés dans le service C.
Calculer les effectifs de chaque service après la restructuration

Problème 214

Soit P la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c \cdot$
La parabole P passe par le point A(1;2) et coupe la droite d d'équation $y = -2\ x + 3$ en deux points d'abscisses respectives -1 et 2.
Déterminer l'équation de la parabole P

Problème 215

Pierre place ses économies d'un montant de 9600 € en trois parties.
Le montant de la troisième partie est la demi-somme des deux autres.
La première partie est placée à 6,5%, la deuxième à 3,5% et la troisième à 4,5%, pendant un an. L'intérêt total produit est 500,30 €
Calculer chacune des trois parties.

Problème 216

Un artisan fabrique des portes de placard. Les unes sont en hêtre, les autres sont en chêne.

* − En raison de contraintes liées à l'approvisionnement, cet artisan ne peut produire plus de 9 portes en chêne par semaine.
* − La fabrication d'une porte en hêtre dure 4 heures et nécessite $2\ m^2$ de bois. Celle d'une porte en chêne dure 2 heures et nécessite $3\ m^2$ de bois.
* − L'artisan ne travaille pas plus de 48 heures par semaine et il ne peut pas entreposer plus de $36\ m^2$ de bois dans son atelier.

#Si l'artisan produit 5 portes en hêtre, combien de portes en chêne au maximum peut-il fabriquer ?

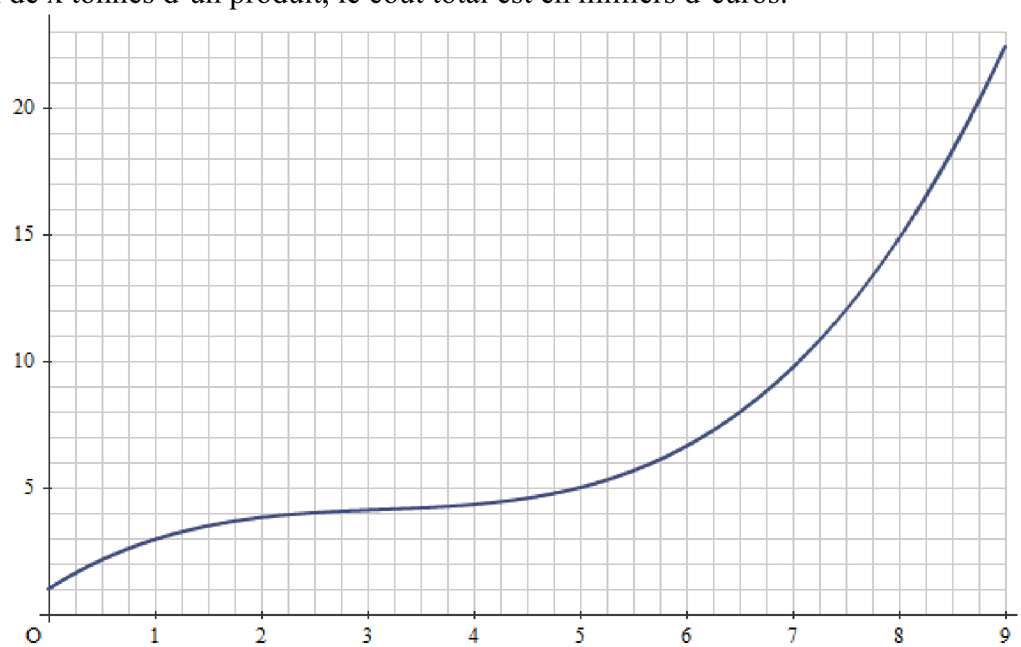
#Si l'artisan produit 3 portes en chêne, combien de portes en hêtre au maximum peut-il fabriquer ?

L'artisan fait un bénéfice de 30 € sur une porte en hêtre et un bénéfice de 20 € sur une porte en chêne.

Quel est le bénéfice maximal en euros ?

Problème 217

La courbe ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f qui modélise sur l'intervalle [0;9] la fonction coût total de production de x tonnes d'un produit, le coût total est en milliers d'euros.



Chaque tonne est vendue au prix de 1600 €

Déterminer les quantités de produit pour lesquelles l'entreprise est bénéficiaire.

En raison de la concurrence sur le marché, l'entreprise vend son produit avec une remise de 15%.

Quelles sont les quantités à produire pour obtenir un bénéfice ?

Quel doit être la production pour que le coût moyen par tonne soit minimal ? Évaluer le bénéfice dans ces conditions.

Problème 218

Le coût total de fabrication de x milliers d'articles est $C(x) = x^2 + 2x + 28{,}75$ (le coût est exprimé en milliers d'euros) avec $x \in [0\,;12]$.
On admet que chaque article fabriqué est vendu au prix unitaire de 16 €
Quel est le montant en euros du bénéfice maximal ?
Quelle est la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif) ?

Problème 219

Une entreprise fabrique un produit dont le coût de production mensuel en euros est modélisé par :
$C(x) = 0{,}02\,x^2 + 37{,}5\,x + 3000$ où x est le nombre d'unités produites mensuellement et x dans l'intervalle [0;1300].
Pour éviter de se retrouver avec un stock important, l'entreprise ajuste son prix de vente en fonction de la quantité produite. Le prix de vente unitaire en euros en fonction de x, est $P(x) = 100 - 0{,}03\,x$.
On suppose que l'ajustement du prix de vente unitaire permet d'écouler toute la production et on note $R(x)$ la recette mensuelle générée par la production et la vente de x produits.
On cherche à déterminer la quantité que l'entreprise devrait produire mensuellement pour maximiser son profit.

Problème 220

En deux ans, une production a augmenté de 68 % :
La première année, elle a augmenté de a % et la seconde année l'augmentation en pourcentage a doublé.
Déterminer l'augmentation en pourcentage au cours de la première année.

Problème 221

Soit C la fonction définie pour tout x élément de l'intervalle $[0\,;10]$ par : $C(x) = 0{,}2\,x^3 - 2\,x^2 + 9\,x + 6\cdot$
La fonction C modélise le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, de x milliers d'articles fabriqués.
Le prix de vente de chaque article produit est égal à 8,35 €
Quelle doit être la production pour que le bénéfice soit maximal ? Quel est ce bénéfice ?

Problème 222

Soit f la fonction définie pour tout x élément de l'intervalle [0 ; 10] par : $f(x) = x^3 - 13\,x^2 + 57\,x + 49$
La fonction f modélise sur l'intervalle]0 ; 10] la fonction coût total de production de x milliers d'articles fabriqués, le coût total est en milliers d'euros.
Quelle est la valeur de x qui minimise le coût moyen ?

Problème 223 stage Saint-Domingue

L'idée est : faire résoudre une inéquation du troisième degré avec un paramètre :
$x^3 \leqslant 4\,x^2 - 2{,}5\,x + \alpha$
Il ne reste plus qu'à trouver un énoncé original correspondant à cette situation.
conjectures : tableur et calcul formel

- ## nombre, pourcentage...etc

Problème 224

On augmente de 30 % la longueur et la largeur d'un rectangle. Que devient son aire ?

Problème 225

Mon petit frère m'affirme que si on augmente le rayon d'un cercle de 100 % alors son aire augmente d'environ 314 %. Je ne suis évidemment pas d'accord avec lui et je lui affirme que l'aire du cercle augmente de 200 %. Qui a raison ?

Problème 226

De quel pourcentage faut-il augmenter la longueur des côtés d'un rectangle pour que son aire soit augmentée de 44 % ?

Problème 227

Un fermier possède 6000 poules pondant chacune, en moyenne, 240 œufs par an. Chaque poule mange annuellement 40 kg de nourriture coûtant 6000 euros par tonne. À combien d'euros revient la nourriture nécessaire pour produire un œuf ?

Problème 228

Dans une classe il y a 46,875% de filles. 40% des filles soit 6 élèves étudient une troisième langue.

Quel est l'effectif de cette classe ?

Problème 229

À compter du 1er juillet 2009, le taux de la TVA sur la restauration est fixé à 5,5 % contre 19,6 % précédemment.

Calculer le pourcentage de la baisse réelle par rapport au prix TTC initial d'une consommation.

On rappelle que le prix TTC est égal au prix HT augmenté de

la TVA et que la TVA se calcule sur le prix hors taxes (HT).

Problème 230 Lu dans la presse :

« Le groupe de services Veolia Environnement a dégagé au 30 septembre 2008 un chiffre d'affaires en hausse de 15,3% par rapport au 30 septembre 2007. La part du chiffre d'affaires réalisé à l'étranger atteint 15,82 milliards d'euros, soit 60,1% du total contre 56,7% au 30 septembre 2007 ».

Quel est le pourcentage de variation du chiffre d'affaires réalisé à l'étranger au 30 septembre 2008 par rapport au 30 septembre 2007 ?

Problème 231 Salaires depuis 1951

Les informations données ci-après sont issues de l'INSEE

Evolution des salaires nets annuels moyens selon le sexe depuis 1951 dans le privé et le semi-public (Salaires moyens nets (1) annuels - Indice base 100 en 1951 en euros constants)

	Ensemble	Hommes	Femmes
1951	100	100	100
1952	105	105	104
1953	109	108	108
1954	119	118	121
1955	130	130	131
1956	141	141	140
1957	152	153	149
1958	146	146	143
1959	147	147	144
1960	156	156	154
1961	163	163	160
1962	171	171	170
1963	180	180	179
1964	185	186	183
1965	191	193	190
1966	198	199	196
1967	202	204	203
1968	214	214	218
1969	223	224	229
1970	231	233	238
1971	243	245	250
1972	252	255	261
1973	263	267	273
1974	271	275	284
1975	279	282	296
1976	293	296	315
1977	297	299	321
1978	308	310	337
1979	301	302	334
1980	302	303	337
1981 (e)	302	302	338
1982	307	307	345
1983 (e)	310	309	351
1984	309	308	351
1985	313	312	356
1986	321	320	366
1987	320	319	364
1988	320	320	367
1989	323	322	370
1990 (e)	328	327	378
1991	330	328	381
1992	330	328	384
1993 *	329	327	394
1994	329	326	404
1995	336	326	408
1996	334	325	405
1997	337	327	410
1998	340	330	414
1999	346	335	421
2000	347	337	423
2001	349	338	424
2002	352	340	430
2003	351	339	428
2004	352	340	430
2005	355	343	436

e : estimations
* : d'importantes modifications de la chaine d'exploitation des DADS rendent notamment les niveaux de 1993 non comparables à ceux de 1992 et 1994
(1) : salaires nets de prélèvements (cotisations sociales, CSG et CRDS) des salariés à temps complet (y c. les apprentis et stagiaires)

Champ : salariés du secteur privé et semi-public (y compris les apprentis et stagiaires)
Source : Insee, DADS

Commenter avec des arguments précis et chiffrés l'évolution des salaires des femmes.

Problème 232

Combien de menus peut-on composer avec 1 entrée froide, 1 entrée chaude, 1 plat et 1 dessert à choisir parmi : 3 entrées froides, 4 entrées chaudes, 2 plats et 5 desserts?

Existe-t- il une méthode permettant de trouver directement le résultat?

- **statistiques**

Problème 233

Les tableaux suivants donnent la distribution du montant en euros du niveau de vie annuel moyen des individus en France en 2007 (Source INSEE)

TABLEAU A : Quantiles

	Niveau de vie annuel moyen
Premier décile D_1	7 700
D_2	11 250
D_3	13 390
D_4	15 300
D_5	17 130
D_6	19 220
D_7	21 560
D_8	24 700
D_9	29 770
95^e centile	63 860

TABLEAU B : Répartition des individus selon l'unité urbaine

	Proportion d'individus en %	Niveau de vie annuel moyen
Communes rurales	26,2	20 080
Unité urbaine de moins de 20 000 habitants	17,8	20 170
Unité urbaine de 20 000 à moins de 200 000 habitants	18,0	20 200
Unité urbaine de 200 000 habitants ou plus (sauf agglomération parisienne)	21,7	20 700
Agglomération parisienne	16,3	25 160

Calculer le niveau de vie moyen annuel d'un individu.

Donner le niveau de vie annuel médian. D'après vous, quel est l'indicateur du niveau de vie le plus pertinent, le niveau de vie moyen ou le niveau de vie médian ?

Problème 234

Le tableau suivant donne le salaire brut horaire, par catégorie socioprofessionnelle simplifiée dans le secteur de «l'habillement, cuir» : Source INSEE.

	Ouvriers non qualifiés	Ouvriers qualifiés	Employés	Professions intermédiaires	Cadres
Salaire brut en €	9,4	10,6	11,8	16,2	32,0
Nombre de milliers d'heures	33 832	55 920	16 872	23 356	11 759

Calculer à 1% près, le pourcentage du nombre de milliers d'heures travaillées pour un salaire brut compris dans l'intervalle $\left[\overline{x}-\frac{2\,s}{3}\,;\,\overline{x}+\frac{2\,s}{3}\right]$ ($\overline{x}$ représentant la moyenne et s l'écart type.)
Quel est le montant du salaire médian ? Déterminer les montants du premier et du troisième quartile.
Calculer à 1% près, le pourcentage du nombre de milliers d'heures travaillées pour un salaire brut compris dans l'intervalle interquartiles.
Dans ce cas, quel est le critère le plus pertinent pour le salaire brut, la moyenne ou la médiane ?

Problème 235

Le tableau suivant donne le montant des salaires annuels exprimés en milliers d'euros d'une petite entreprise.

Salaires	16	18	20	25	30	40
Nombre de salariés	6	9	10	8	5	2

Calculer le montant en euros du salaire moyen annuel dans cette entreprise.
Soit S la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$S(x)=6(16-x)^2+9(18-x)^2+10(20-x)^2+8(25-x)^2+5(30-x)^2+2(40-x)^2$
Pour quelle valeur de x S(x) est minimal ? Conjecture ?
Calculer l'écart type.

• Probabilité

Problème 236

Deux maladies A et B affectent les animaux d'un pays. On estime que 12 % des animaux sont atteints de la maladie A, 8 % des animaux sont atteints de la maladie B et 3 % des animaux sont atteints des deux maladies.
On prend un animal de ce pays au hasard.
Calculer la probabilité que cet animal ne soit pas malade

Problème 237

Une entreprise fabrique un produit destiné à l'exportation.
Sur le marché extérieur la demande (en milliers d'unités) est régie par la loi de probabilité suivante :

x_i	1	2	3	4	5
$p(x_i)$	$6a$	$4a$	$2a$	$2a$	a

Si l'entreprise dispose d'un stock de 3000 unités du produit, quelle est la probabilité qu'il y ait rupture de stock ?

Problème 238

Dans un examen, l'un des exercices est un Q.C.M. de trois questions numérotées 1, 2 et 3. Pour chaque question, trois réponses sont proposées, parmi lesquelles une seule est exacte. Notons A la première réponse proposée, B la seconde et C la troisième.
Le barème de notation est le suivant : Une bonne réponse rapporte 1 point ; une mauvaise réponse enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total de points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.
Un élève décide de répondre au hasard à toutes les questions. Il indique donc sur sa copie une liste ordonnée de trois lettres.
Par exemple,
s'il choisit la réponse A pour la première et pour la dernière question, et la réponse C pour la deuxième question, il répond : "ACA".
Quelle est l'espérance de sa note ? La probabilité d'avoir la moyenne ?

Problème 239

Le tableau ci-dessous, répertorie les 25 plus grandes entreprises mondiales (en termes de chiffre d'affaires) selon le classement 2010 Fortune Global 500. Le montant du chiffre d'affaires est en milliards de dollars américain.

RANG	ENTREPRISE	RÉGION	CHIFFRE D'AFFAIRES	BRANCHE D'ACTIVITÉ
1	Wal-Mart Stores	États-Unis	408,2	Commerce de détail
2	Royal Dutch Shell	Europe	285,1	Pétrole
3	Exxon Mobil	États-Unis	284,7	Pétrole
4	BP	Europe	246,1	Pétrole
5	Toyota Motor	Asie	204,1	Automobile
6	Japan Post Holdings	Asie	202,2	Services
7	Sinopec	Asie	187,5	Pétrole
8	State Grid	Asie	184,5	Electricité
9	General Electric	Europe	175,3	Assurances
10	China National Petroleum	Asie	165,5	Pétrole
11	Chevron	États-Unis	163,5	Pétrole
12	ING Group	Europe	163,2	Services financiers
13	General Electric	États-Unis	156,8	Société mixte
14	Total	Europe	155,9	Pétrole
15	Bank of America Corp.	États-Unis	150,5	Banque
16	Volkswagen	Europe	146,2	Automobile
17	ConocoPhillips	États-Unis	139,5	Pétrole
18	BNP Paribas	Europe	130,7	Banque
19	Assicurazioni Generali	Europe	126,0	Assurances
20	Allianz	Europe	125,9	Assurances
21	AT&T	États-Unis	123,0	Télécommunications
22	Carrefour	Europe	121,5	Commerce de détail
23	Ford Motor	États-Unis	118,3	Automobile
24	ENI	Europe	117,2	Pétrole
25	J.P. Morgan Chase & Co.	États-Unis	115,6	Banque

Quel pourcentage d'entreprises ont un chiffre d'affaires inférieur au chiffre d'affaires moyen ?

On choisi au hasard parmi les 25 plus grandes entreprises une compagnie pétrolière.

Quelle est la probabilité que cette entreprise ne soit pas une entreprise européenne ?

Trois personnes choisissent chacune et au hasard une des 25 plus grandes entreprises.

Quelle est la probabilité qu'au moins une de ces trois entreprises soit une entreprise européenne ?

- ## enseignement de spécialité (ES) ?

Problème 240

Au départ d'un voyage, le réservoir d'une voiture contient 60 litres d'essence. Après 350km, celui-ci n'en contient plus que 25.
En supposant que l'on puisse approcher la quantité d'essence contenue dans le réservoir par une fonction affine de la distance parcourue, déterminer la quantité d'essence contenue dans le réservoir une fois parcourus 100km supplémentaires.

Problème 241

Une entreprise fabrique deux types de produits notés A et B :

-la fabrication d'un article A nécessite 6 unités de matières premières, 4 unités de main d'œuvre et 1 unité d'énergie ;

-la fabrication d'un article B nécessite 9 unités de matières premières, 3 unités de main d'œuvre et 2 unités d'énergie.

On note $C = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 80 \end{pmatrix}$ la matrice ligne des coûts unitaires, en euros, des trois facteurs de production (*matières premières, main d'œuvre et énergie*)

Le bénéfice est égal à 20% du prix de revient sur le produit A et à 25% du prix de revient sur le produit B.

L'entreprise reçoit une commande de 100 produits A et 80 produits B. Calculer à l'aide d'un produit de deux matrices, le montant total en euros de la commande.

Problème 242

Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels. Calculer a et b pour que $T = T^{-1}$

Problème 243

Une entreprise vend quatre types de produits notés P_1, P_2, P_3 et P_4. La matrice des commandes de trois clients notés X, Y et Z est $C = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 5 & 15 \\ 13 & 0 & 12 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 18 \end{pmatrix}$ les lignes étant relatives aux clients et les colonnes aux produits.

Les prix unitaires de chacun des quatre produits sont respectivement 45 €, 15 €, 20 € et 30 €. Calculer à l'aide d'un produit de deux matrices, le montant en euros de la commande de chacun des clients.

source pour ce niveau:

Site de A Yallouz

- ## enseignement de spécialité L

- définition, complexité d'un algorithme
- exemples d'algorithmes
- document d'accompagnement T L
- à consulter *(pleins de liens utiles et d'exercices)*

Terminale

document d'accompagnement TES et TS programmes en consultation : ES et L S (rentrée 2012)

a) Scientifique

• Probabilités

Problème 244

Une roue de loterie munie d'un index fixe est divisée en secteurs de mêmes dimensions et de différentes couleurs. Le jeu consiste à miser 5 euros, à faire tourner la roue et à noter la couleur du secteur désigné par l'index à l'arrêt de la roue. On admet que chaque secteur a la même probabilité d'apparaître. La roue comporte :

- n secteurs rouges qui font perdre la mise (gain du joueur : −5 €) ;
- 6 bleus où l'on reçoit 5 € (gain du joueur nul) ;
- 3 verts où l'on reçoit 20 €;
- 1 jaune où l'on reçoit 100 €.

Déterminer le nombre minimum n de secteurs rouges que doit comporter la roue pour que le propriétaire soit content.

Problème 245

Une maladie est apparue dans la population d'un pays. Une étude statistique a montré qu'elle touche actuellement un individu sur 10 000. D'autre part, on a mis au point un test de dépistage de cette maladie, pour lequel une étude statistique a montré que :
– sur un malade, la probabilité que le test soit positif est de 98%
– sur une personne saine, la probabilité que le test soit négatif est de 99%.
Étudier la qualité de ce test.

Problème 246

Soient a et b deux nombres réels distincts de l'intervalle [-5,5].

On note F le point de coordonnées $(0;a)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et D la droite d'équation $y = b$.

A étant un point quelconque de la droite D, on désigne par ΔA la médiatrice du segment $[F A]$ et par δA la perpendiculaire à D passant par A. On note M le point d'intersection des droites ΔA et δA et I le milieu du segment $[AM]$.

On note G le lieu des points M lorsque A parcourt D et F le lieu des points I lorsque A parcourt D.

(a) Quelle est la probabilité que G ne coupe pas l'axe des abscisses ?

(b) Quelle est la probabilité que F ne coupe pas l'axe des abscisses ?

IREM Lyon - commentaires

Problème 247

On lance n fois un dé équilibré, quelle est la probabilité pour que le numéro 6 apparaisse au moins une fois?
Combien de fois faut-il le lancer pour que cette probabilité soit supérieure à 0,99 ?

Problème 248

Un comité de 12 personnes se propose d'élire un bureau comportant un président, un trésorier et un secrétaire. Il y a 8 hommes et 4 femmes. Le cumul des mandats est interdit.

Combien y a-t-il de bureau possibles? Combien y en a-t-il où le président et le trésorier sont de sexes différents?

Problème 249

Un jeu consiste à miser 10€ et à lancer 3 dés.

- Si l'on obtient trois « 6 », on gagne 20€
- Si on en obtient deux, on gagne 10€
- Si on en obtient un seul, on gagne 5€

Sinon on ne gagne rien.   Question(s) : ……..

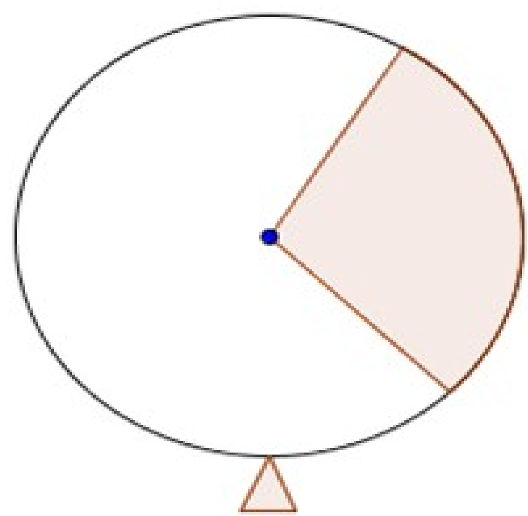
Problème 250

Une roue comporte un secteur coloré comme l'indique la figure ci-contre.

On désigne par t la proportion de la roue qui est colorée ($t \in [0\ ;\ 1]$). On considère que la roue est parfaitement équilibrée

Un jeu consiste à lancer 5 fois la roue : pour gagner il faut qu'elle s'arrête 3 fois exactement sur le secteur coloré.

L'objectif de ce TP est de déterminer s'il y a une valeur de t qui optimise la probabilité p de gagner.



Problème 251

On dispose de deux urnes U et V contenant des boules indiscernables au toucher.

L'urne U contient dix boules numérotées de 1 à 10. L'urne V contient dix boules numérotées de 0 à 9.

Un jeu se déroule de la manière suivante : le joueur verse une mise initiale de 100 jetons, puis il tire au hasard une boule dans l'urne U et une boule dans l'urne V de façon indépendante.

Chaque boule portant un numéro inférieur ou égal à 4 rapporte a jetons où a est un entier naturel non nul, le tirage d'une autre boule ne rapporte ni ne fait perdre aucun jeton. On regarde à l'issue de ce jeu le gain algébrique (gain ou perte) compté en jetons.

Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique à l'issue d'un tirage.

Déterminer l'espérance de X en fonction de a.

Est-il possible de trouver a afin que le jeu soit équitable ?

Problème 252

On dispose de trois urnes, notées A, B et C, contenant chacune 10 jetons indiscernables au toucher :

- l'urne A contient 4 jetons noirs et 6 jetons blancs,
- l'urne B contient 7 jetons noirs et 3 jetons blancs,
- l'urne C contient 6 jetons noirs et 4 jetons blancs.

Le jeu consiste à extraire successivement un jeton dans chacune des trois urnes, le joueur pouvant choisir d'effectuer ces tirages soit dans l'ordre A puis B puis C soit dans l'ordre A puis C puis B.

Lorsque le jeton extrait de la $2^{\text{ème}}$ urne est d'une couleur différente de celui de la $1^{\text{ère}}$, le joueur gagne un point, sinon il perd un point.

Lorsque le jeton extrait de la $3^{\text{ème}}$ urne est d'une couleur différente de celui de la $2^{\text{ème}}$, le joueur gagne un point, sinon il perd un point.

La partie est gagnée si le total des points marqués est égal à 2.

On se propose d'étudier si l'un des deux ordres de tirages proposés est plus favorable au joueur que l'autre.

Problème 253

On lance trois dés bien équilibrés dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.

Alice et Bob calculent la somme des trois nombres obtenus.

Si la somme obtenue est égale à 9, Alice gagne.

Si la somme obtenue est égale à 10, Bob gagne.

Dans tous les autres cas, la partie est annulée.

Le but de l’exercice est de déterminer qui, d’Alice ou de Bob, a la plus grande probabilité de gagner.

Problème 254

Un pion est placé sur la case de départ :

				Départ				

Le lancer d'une pièce bien équilibrée détermine le déplacement du pion.

- PILE, le pion se déplace vers la droite,
- FACE, le pion se déplace vers la gauche.

Un trajet est une succession de 4 déplacements. On s'intéresse à l'événement A : « le pion est revenu à la case départ après 4 déplacements ».

A chaque lancer, on associe le réel +1 si le résultat est PILE et −1 si le résultat est FACE.

Problème 255

On considère une suite (S_n) définie par le lancer d'une pièce équilibrée de la façon suivante :

$S_0 = 0$ et

$S_{n+1} = S_n + 1$ si on obtient PILE,

$S_{n+1} = S_n - 1$ si on obtient FACE.

On note A_n l'événement « obtenir $S_n = 0$ ».

On s'intéresse à la probabilité de réaliser l'événement A_n pour un entier n non nul donné.

Problème 256

On dispose d'une roue divisée en trois secteurs identiques numérotés 1, 2 et 3.

On suppose qu'après rotation, la roue s'arrête sur l'un des trois secteurs de façon équiprobable.

On fait tourner successivement trois fois de suite la roue dans le sens trigonométrique en supposant que chaque résultat est indépendant des deux autres.

S désigne la variable aléatoire définie par la somme des trois numéros obtenus.

La variable aléatoire D est le numéro obtenu lors de la seconde rotation.

Les évènements « S=3 » et « D=1 » sont-ils indépendants ?

- **analyse**

Problème 257

Soit f la fonction définie sur R par $f(x)=\cos(x)\sin(x)$
Entrer en cellule A0 d'une feuille du tableur Xcas : =cos(x)*sin(x)
puis en cellule A1 : =normal(diff(A0,x))
et en cellule A2 : =normal(diff(A1,x,4)) , formule que vous copierez vers le bas.
1. Quelle formule conjecture-t-on par observation de cette feuille de calculs ?
2. Démontrez cette formule.

Problème 258

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(ax^2+bx+c)\exp(x)$
1. Conjecturer, par observation des résultats sur une feuille de tableur, une expression de $f^{(n)}(x)$.
2. Démontrer cette conjecture.

Problème 259

a désigne un nombre réel. On définit une suite u par : $\begin{cases} u_0=a \\ u_{n+1}=2+\ln(u_n) \end{cases}$

étudier la convergence de cette suite.
version fermée et commentaires

Problème 260

Madame Lacraie, prof. de Maths, enseigne dans deux classes de même niveau ayant chacune deux heures de maths par semaine. La classe A a une heure le lundi et une heure le jeudi. La classe B a une heure le mardi et une heure le vendredi.

Normalement Mme Lacraie traite un paragraphe par heure, mais lorsqu'elle refait le même cours, elle va deux fois plus vite.

Au bout de 10 semaines combien de paragraphes auront été traités dans chaque classe ? Au bout de n semaines ?

Problème 261

Il est bien connu que les Shadocks pondent des œufs. Pour pondre un œuf ils doivent compter jusqu'à 4 ou plutôt, quand un Shadock compte régulièrement, il pond un œuf à chaque multiple de 4.

Le Ministre des Pontes a chargé son Conseiller de compter tous les œufs entreposés dans la réserve du ministère. Le conseiller réussit tant bien que mal à compter 1995 œufs. Combien y avait-il d'œufs dans la réserve initialement ?

Problème 262

Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\left(1+i\dfrac{\alpha}{n}\right)^n$ où α est un réel quelconque

Problème 263

Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$

Problème 264

Soit $f(x) = x\, e^{-x}$. Déterminer les dérivées successives de *f.*

Problème 265

On veut construire une rampe pour handicapés permettant de descendre une marche de hauteur 1 ; trouver une courbe permettant le tracé de la rampe de sorte qu'il n'y ait pas de point anguleux et que la pente maximale de la rampe soit de 10% ; quelle est l'emprise au sol de la rampe ?

Problème 266

On définit la fonction **cosh** (cosinus hyperbolique) par $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \cosh(a + kb)$.

Problème 267

On considère la suite (q_n) définie par : $q_0 = 0$, et pour tout n, $q_{n+1} = 2\, q_n + (-1)^n$.
On demande d'étudier la suite (q_n) en la comparant avec la suite des puissances de 2 : $p_n = 2^n$

Problème 268

Dans un repère orthonormé, on considère les points A_n dont les coordonnées $(x_n\,;\, y_n)$ sont définies par:

pour $n = 0$: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 12{,}4 \end{cases}$ et pour tout entier n: $\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}8\; x_n - 0{,}6\; y_n + 2{,}9 \\ y_{n+1} = 0{,}6\; x_n + 0{,}8\; y_n - 4{,}9 \end{cases}$

Les points A_n sont-ils sur une courbe identifiable ?

Problème 269

On construit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante:

- u_0 et v_0 sont deux réels donnés
- u_{n+1} est la moyenne arithmétique de u_n et (v_n)
- v_{n+1} est la moyenne harmonique de u_n et v_n

Observez également la suite $w_n = u_n \times v_n$

Problème 270 « recueil de problèmes de mathématiques à l'usage de mathématiques élémentaires » (1893)

On considère, pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et x $\neq \frac{\pi}{3}$, la fonction $f(x) = \frac{(\tan(x))^3}{\tan(3\,x)}$

Pour quelles valeurs de x est-ce que la fonction f admet un maximum ou un minimum ?

Problème 271 La tasse de café

Le café, c'est bon quand ça sort de la cafetière, à 80°C. Après, ça refroidit vite: ça va encore vers 60°C, mais à partir de 40°C, c'est tiède et ce n'est plus bon du tout! L'objectif de ce travail est de modéliser la température du café (en °C) par une fonction θ du temps (en min), à partir de données expérimentales, et d'une loi physique.

- à t = 16 min, la température θ du café vaut 40°C
- La température ambiante α reste constante et égale à 20°C

Loi physique: le refroidissement du café est proportionnel à la différence entre la température initiale du café et la température ambiante.

Problème 272

Quelle propriété possède le point où la tangente à la courbe $y = \exp(x)$ coupe l'axe des abscisses ?

Problème 273

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x = x^4$

Problème 274

On appelle série harmonique la somme des inverses des entiers naturels: $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

Pour l'étudier, on définit la somme S_n des inverses des entiers de 1 à n, et on s'intéresse à ce qu'il se passe quand n tend vers l'infini.
(non accessible sous cette forme, des pistes paraissent indispensables.)
voir entre écran et papier

Problème 275 Population bactérienne.

En biologie, si l'on considère une population de P bactéries, P est fonction du temps t(en heure). En l'absence de facteurs limitant la croissance de la population on admet que le taux d'accroissement de P est à chaque instant proportionnel à cette population.

Soit P_0 la population initiale (lorsque t=0): au bout de deux heures la population a été multipliée par 2,5 .

Déterminer le temps de doublement de la population.

Problème 276

Soit un circuit comportant un générateur de f.e.m. E (en volt) et une bobine d'inductance L (en Henrys) et de résistance interne R (en Ohms). Soit i(t) l'intensité du courant à chaque instant t après la fermeture.

Les lois de la physique donnent à chaque instant t l'équation: $L\frac{di}{dt}+Ri=E$, $i(0)=0\cdot$

On donne E = 10V, R =100V, L = 0,2 H

Déterminer à 1ms près, l'instant t_0 à partir duquel l'intensité est supérieure à 95mA

Problème 277

La vitesse d'un corps lâché sans vitesse initiale dans le vide est proportionnelle à la durée de sa chute :

à chaque instant t (en seconde) la vitesse est donnée par v(t) = 9,8t (en m.s)

Soit d_n la distance parcourue la n $^{\text{ième}}$ seconde. Quelle est la nature de la suite (d_n) ?

Problème 278

On rappelle que l'énergie dissipée par une résistance de valeur R (en **Ω)** traversée par un courant I constant (en A) pendant une durée t (en s) est donnée par $W = R I^2 t$ (en Joule).

Si l'intensité est une fonction sinusoïdale d'amplitude I_m et de pulsation ω,

a)quelle est l'énergie dissipée par ce dipôle pendant une période?

b)En déduire la puissance moyenne.

Problème 279

La figure 1 ci-dessous, sur laquelle les distances et les hauteurs sont indiquées en mètres, montre le profil d'un terrain. Le tableau décrit numériquement le même profil. Et la formule (1) en fournit une description algébrique.

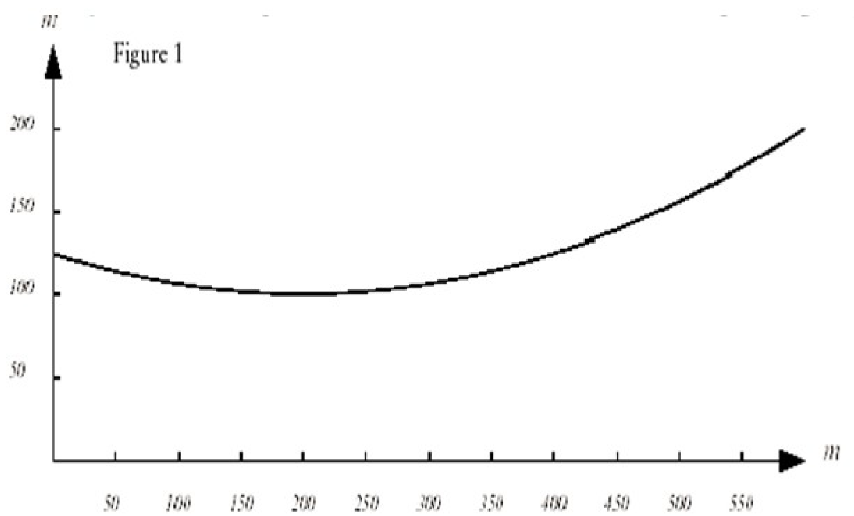


Figure 1

d en m	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
h(d) en m	125,00	114,06	106,25	102,10	100,00	102,10	106,25	114,07	125,00	139,06	156,25	176,56	200

Tableau 1

$$h(d) = \frac{d^2}{1600} - \frac{d}{4} + 125 \quad (1)$$

On voudrait niveler le terrain décrit ci-contre.

À quelle hauteur faut-il situer le terrain nivelé pour que les remblais équilibrent exactement les déblais ?

Problème 280

L'acidité d'une solution est mesurée par son pH : $pH = -\log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ désigne la concentration de la solution en ions H_3O^+ (en mole par litre)

Comment varie le pH d'une solution lorsque sa concentration en ions $[H_3O^+]$ décuple (multipliée par 10) ?

Comment varie la concentration d'une solution lorsque son pH augmente de 2 ? Diminue de 3 ?

L'acide chlorhydrique peut avoir un pH inférieur à 0 : interpréter.

Problème 281

L'intensité I en bels (B) d'un son de puissance P et donnée par $I = \log\left(\frac{P}{P_0}\right)$ où P_0 correspond au seuil d'audibilité au-dessous duquel aucun son n'est perçu. Le décibel (dB) est le dixième du bel.

Quelle est l'intensité d'un son au seuil inférieur de l'audible ?

Une intensité peut-elle être négative ?

Montrer que le fait de doubler la puissance sonore augmente l'intensité d'environ 3 dB

De quel rapport augmente la puissance sonore si l'intensité augmente de 10dB ? de 20dB ?

Problème 282 Chute d'un corps dans le vide

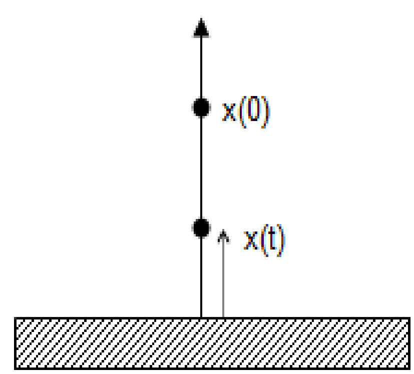
1. Soit v(t) la vitesse à l'instant t d'un corps lâché à l'instant t =0 sans vitesse initiale à une altitude de 50m (*Pour se repérer on oriente l'axe vertical vers le haut*)

principe fondamental de la dynamique : $m\frac{dv}{dt} = \sum forces$

Soit x(t) sa position par rapport au sol après t secondes de chute

Quelle est sa vitesse au contact du sol ?

2.Le corps est maintenant lancer vers le haut a une vitesse de 10m/s.
Quelle est la hauteur maximale atteinte par le corps ?
A quel instant le corps atteindra-t-il le sol ? quelle est alors sa vitesse ?



Problème 283

Le taux annuel de croissance de la population mondiale est actuellement de 1,75 % par an.

1. Sachant que la population mondiale en 1990 est P_0 5,3 milliards, on désigne par P_n la population mondiale en l'année (1990 + n).

Déterminer (en milliards) ce que sera la population mondiale en l'an 2000 si le taux annuel reste constant, puis en 2010.

2. On dit que la population mondiale double tous les 40 ans actuellement ; justifier cette affirmation.

3. Quel devrait être le taux de croissance annuel pour qu'elle double tous les 30 ans ?

Problème 284 Radioactivité

Un corps radioactif est un corps dont les atomes se désintègrent spontanément et donnent naissance à des atomes d'un autre élément en émettant des particules élémentaires.

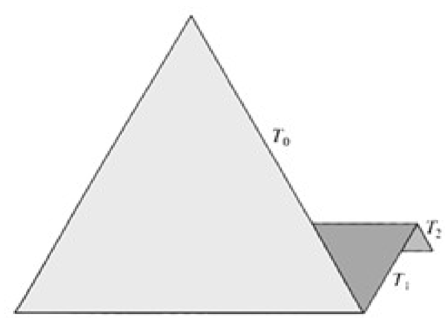
Le taux d'atomes désintégrés par le radium 226 est d'environ 0,04 % en un an.

Quel est le taux de désintégration par siècle ?

La période d'un corps radioactif est le temps nécessaire à la désintégration de la moitié des atomes du corps .
À l'aide d'une calculatrice, déterminer la période du radium 226.

Problème 285

On construit une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de triangles équilatéraux ; le triangle T_0 a un côté u_0 8, quel que soit l'entier naturel n; le triangle T_{n+1} a un côté u_{n+1} égal au tiers du côté u_n du triangle T_n.
On désigne par A_n l'aire totale du domaine du plan formé par la réunion des $n + 1$ premiers triangles T_0, T_1, ..., T_n :déterminer la limite de (A_n)



Problème 286

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on considère les points A de coordonnées (0 ; 6), B de coordonnées (2 ; 0) et C de coordonnées (4 ; 6).

Soit t un réel de l'intervalle [0 ; 1]. On définit les points :

- G barycentre du système de points pondérés $\{(A ; 1 - t) ; (B ; t)\}$;
- H barycentre du système de points pondérés $\{(B ; 1 - t) ; (C ; t)\}$;
- M barycentre du système de points pondérés $\{(G ; 1 - t) ; (H ; t)\}$.

Le but de l'exercice est d'étudier le lieu des points M quand t décrit l'intervalle [0; 1], et la position de cet ensemble par rapport aux droites (AB) et (BC).

Problème 287

Dans un repère orthonormal d'origine O, on considère la courbe C représentative de la fonction logarithme népérien.

On s'intéresse à la distance OM lorsque M parcourt C . Le but de l'exercice est de préciser si cette distance peut être rendue minimale et de caractériser le ou les point(s) M, s'il en existe, situé(s) sur C et rendant cette distance minimale.

Problème 288

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{1+x} + e^{1-x}}{2}$ et $g(x) = \dfrac{e^{1+x} - e^{1-x}}{2}$.

On note C_f la courbe représentative de f et C_g la courbe représentative de g.

Pour tout réel a , on note A le point de C_f d'abscisse a et T_A la tangente à C_f au point A, B le point de C_g d'abscisse a et T_B la tangente à C_g au point B, $M(x_M ; y_M)$ le point d'intersection des tangentes T_A et T_B.

On souhaite étudier le lieu géométrique E du point M lorsque a varie dans $\mathbb{R}$.

Problème 289

Soit un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan et la courbe C d'équation $y = e^x - 1$.

Soit B le point de C d'abscisse 1 et A le point de C d'abscisse a, a étant un nombre réel de l'intervalle [0 ; 1].

On s'intéresse à l'aire du triangle OAB et à la variation de cette aire en fonction de a.

Problème 290

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ la courbe C est la courbe représentative de la fonction exponentielle et le point B a pour coordonnées (2 ; −1).

On admet que la distance BM admet un minimum quand M décrit C. Ce minimum est appelé distance du point B à la courbe C.

Le but de l’exercice est de trouver la distance du point B à la courbe C.

Problème 291

m un réel. On cherche à déterminer le nombre de solutions réelles dans l’intervalle [−5 ; 5] de l’équation : (E).

$-x^2 + 2x - 1 + m\,e^{-x} = 0$

Problème 292

On donne un réel k. On s’intéresse au nombre de solutions de l’équation (E) : $\ln x = kx^2$ pour x strictement positif.

Problème 293

On désigne par a un nombre réel. Dans un repère orthonormal du plan, on considère la courbe C , représentative de la fonction exponentielle et la droite D_a d’équation $y = ax$

On s'intéresse à la position relative de C et D_a.

Problème 294

Un agriculteur doit se rendre du point C de son champ à sa ferme F. Il se trouve à 3 kilomètres de la route qui mène à la ferme, et à 5 kilomètres de cette dernière, comme indiqué sur la figure suivante :

On considère que :

* Les points H, M et F sont alignés sur le bord de la route ;

* $CH = 3$; $CF = 5$;

* La droite (CH) est perpendiculaire à la droite (HF).

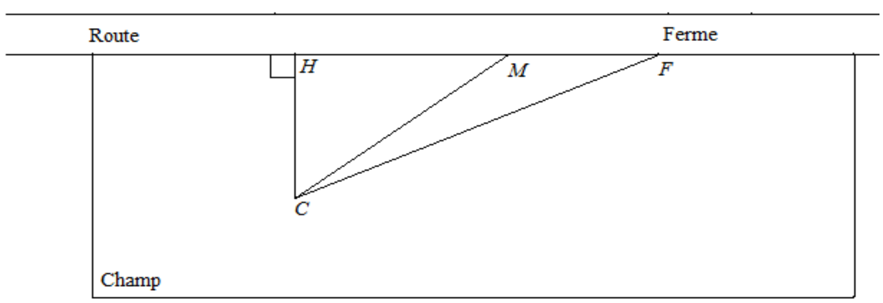
On note x la distance HM.

Le fermier cherche à économiser sa consommation de carburant. Il sait que sa consommation est :

* d'un litre de carburant par kilomètre parcouru sur la route

* de k litres de carburant par kilomètre parcouru à travers champs (le facteur k, avec $k > 1$, dépend de l'état du terrain : plus le terrain est accidenté plus k est grand).

On admettra pour réaliser l'étude expérimentale que la fonction « consommation de carburant », notée f_k, est définie par : pour tout réel x de $[0 ; 4]$, $f_k(x) = k\sqrt{x^2+9}+4-x$.



Recherche de la consommation minimale
le fermier, qui a un grand sens pratique, pense que si k est inférieur à une certaine valeur limite k_0, il n'est pas utile de rejoindre la route et que couper directement à travers champ n'est pas plus cher ! On cherche à vérifier cette affirmation.

Problème 295

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On considère la parabole P d'équation $y = \frac{1}{2}x^2$. Etant donné un réel t non nul, on se propose de mettre en évidence, puis de démontrer une propriété du point d'intersection des tangentes à la parabole P aux points M et M' d'abscisses respectives t et $t' = -\frac{1}{t}$

Problème 296

On considère la suite récurrente (u_n) de premier terme $u_1 = 0$ et telle que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$. Étudier la convergence de cette suite en utilisant les valeurs $\frac{1}{u_n - 1}$

Problème 297

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

Étudier la convergence de cette suite en utilisant les valeurs $v_n - \frac{1}{n}$

Problème 298

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 9$ et, pour tout entier $n > 0$: $b_n = \frac{25}{(a_n)^2}$ et $a_{n+1} = \frac{2\,a_n + b_n}{3}$

On se propose d'étudier la monotonie et la limite de chacune de ces deux suites.

On pourra utiliser les valeurs a_n^3

Problème 299

L'objet de ce travail est l'étude de flux de populations entre trois zones géographiques : une ville notée A, une zone périphérique notée B et une zone de campagne notée C.

Pour modéliser les flux de population, on fait les hypothèses suivantes :

– La population totale des trois zones reste constante.

– Chaque année la zone A perd 10% de sa population, mais accueille 10% de la populationde la zone B et 1% de la population de la zone C.

– Chaque année la zone B perd 10% de sa population, mais accueille 10% de la population de la zone A et 1% de la population de la zone C.

– Chaque année la zone C perd 2% de sa population.

Au premier janvier 2008, la zone A comptait 5 000 habitants, la zone B en comptait 2 000 et la zone C en comptait 4 000.

On désigne par a_n, b_n et c_n les nombres d'habitants respectifs des zones A, B et C au premier janvier de l'année 2008 + n. On admettra, pour l'étude mathématique, que les nombres réels a_n, b_n et c_n peuvent ne pas être entiers.

On souhaite décrire, avec le modèle ci-dessus, l'évolution des trois populations.

(on pourra regarder les différences de population entre les zones A et B)

Problème 300

Soit u_1 un nombre réel fixé. On considère la suite récurrente u de premier terme u_1 et telle que pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + 1$.   étudier la convergence de cette suite

Problème 301

On considère la suite (u_n) définie pour tout n entier strictement positif par :

$$u_n = \frac{6}{n}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right) = \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 .$$

On cherche une formule simple donnant la somme des carrés des n premiers entiers strictement positifs.

Problème 302

On considère l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x$,

où la fonction f est définie, pour tout nombre réel x, par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} .$$

I est une intégrale dont on ne sait pas, en terminale S, calculer la valeur exacte.

Le but de l'exercice consiste donc à en déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2}

Problème 303

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse (de courte durée). La concentration du médicament dans le sang est immédiatement maximale, puis elle diminue en fonction du temps. On fait l'hypothèse (H) suivante :

La diminution de la concentration entre deux instants t_0 et t_1 est proportionnelle à la fois à la durée $t_1 - t_0$ et à la concentration à l'instant t_0.

On note C_0 la concentration initiale et C_n la concentration au bout de n minutes. (On prendra pour unité de temps la minute et $C_0 = 1$ pour unité de concentration initiale à la fin de l'injection).

On admet que l'hypothèse (H) conduit à la relation : $C_{n+1} - C_n = -k\, C_n$ où k est une constante positive.

Étude de la demi-vie, c'est-à-dire la période au bout de laquelle la concentration du médicament dans le sang diminue de moitié.

• géométrie

Problème 304

Démonstration du théorème de l'angle inscrit en utilisant les complexes.

Problème 305

Dans le plan complexe on considère :

-un quadrilatère convexe ABCD

- extérieurement au quadrilatère , le point M_1 (respectivement M_2, M_3, M_4) tel que le triangle AM_1B (respectivement BM_2C, CM_3D, DM_4A) soir rectangle et isocèle de sommet M_1 (respectivement M_2, M_3, M_4).

Le but de l'exercice est de démontrer que les segments [M_1M_3] et [M_2M_4] sont orthogonaux et de même longueur.

Problème 306

Dans un repère orthonormal du plan, on considère la courbe représentative C de la fonction $y = \mathrm{e}^x$ et la droite D d'équation $y = 2x - 3$.

On se propose de déterminer, s'il existe, un point *M* de C tel que la distance de *M* à la droite D soit minimale.

Problème 307

Dans le plan orienté, on définit le triangle *OAB* et on note *M* le milieu du segment [*AB*]. On construit les triangles *AOD* et *OBC* directs, rectangles et isocèles en *O*.

L'objet du problème est d'étudier les longueurs et les positions relatives des segments [*OM*] et [*DC*].

Problème 308

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$, on définit les points *A*(1, 0, 0), *B*(0, 1, 0) et *C*(0, 0, 1) et le point *I* milieu du segment [*AB*].

Pour un point *M* du segment [*AC*], on définit le plan P passant par le point *I* et orthogonal à la doite (*IM*).

Le plan P coupe la droite (*OB*) en un point *N*.

Quelle est la position du point *M*, sur le segment [*AC*], telle que la longueur MN soit minimale. Quelle est cette longueur minimale ?

Problème 309

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$, on considère les points *A*(0, 6, 0), *B*(0, 0, 8), *C*(10, 0, 8). *M* est un point appartenant au segment [*OB*]. Le plan Π passant par *M* et orthogonal à la droite (*OB*) coupe la droite (*AC*) en *P*.

On note respectivement *N* et *Q* les points d'intersection du plan Π avec les droites (*OC*) et (*AB*) et l'on admet que le quadrilatère *MNPQ* est un rectangle. Quelle doit être la position du point M rendant maximale l'aire du rectangle ?

Problème 310

On considère dans le plan (P) une droite D et un point F non situé sur cette droite. Il s'agit de déterminer l'ensemble G, lieu géométrique des points du plan équidistants de D et de F.

Problème 311

On considère un tétraèdre $ABCD$ et un point I quelconque du segment $[AB]$. Le plan parallèle au plan (BCD) passant par I coupe la droite (AC) en J et la droite (AD) en K.

On désigne par L l'isobarycentre des trois points I, J et K. On considère le point H projeté orthogonal du point C sur la droite (BL).

Le but de l'exercice est de déterminer le lieu géométrique du point L ainsi que celui du point H, lorsque I décrit le segment $[AB]$.

Problème 312

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u}\ ;\vec{v})$, on considère les points $A(1;0)$ et $B(0;1)$.

A tout point M du segment $[AB]$, on associe les points P et Q, projetés orthogonaux respectifs de M sur les droites (OA) et (OB), et les points R et S, sommets du carré $PRQS$ de diagonale $[PQ]$ tels que $(\overrightarrow{PR}\ ;\overrightarrow{PS})=\frac{\pi}{2}$.

On note aussi I le milieu du segment $[PQ]$.

Le but de l'exercice est d'étudier les lieux des points R et S lorsque M décrit le segment $[AB]$.

Problème 313

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$. On appelle (E) la courbe d'équation $y=\frac{1}{x}$.

On désigne par a, b, c trois réels non nuls, deux à deux distincts, puis par A, B, C les points de (E) d'abscisses respectives a, b, c.

Le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

On appelle C le cercle circonscrit au triangle ABC, son centre est le point E.

Le point D est le symétrique du point H par rapport à O.

Le but de l'exercice est d'observer la position de certains points de la figure et d'étudier celle du point H

Problème 314

Dans le plan P, on donne quatre points O, A, B et C et un cercle (Γ) de centre O.

Le point M est un point quelconque variable sur le cercle (Γ). On associe au point M l'unique point M' du plan P défini par l'égalité :

$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\,\overrightarrow{MC}\,.$$

Il s'agit de déterminer le lieu géométrique L du point M' lorsque le lieu géométrique du point M est le cercle (Γ).

Problème 315

Dans le plan, ABC est un triangle quelconque.

On note K le centre de son cercle circonscrit et H son orthocentre.

On s'intéresse au lieu (L) des points H quand C se déplace sur une droite parallèle à la droite (AB).

Problème 316

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

soient $A(0\,;0\,;1)$, $B(1\,;1\,;0)$ et $C(1\,;-1\,;1)$, les droites (OB) et (AC), un point M mobile sur la droite (OB) et un point N mobile sur la droite (AC)

On veut que la distance MN soit minimale.

Problème 317

On considère A, B et C trois points du plan et k un réel de l'intervalle $[-1\,;1]$.

On note G_k le barycentre du système de points pondérés : $\{(A, k^2+1)\,;(B, k)\,;(C, -k)\}$.

Le but de cet exercice est de déterminer le lieu des points G_k lorsque k décrit l'intervalle $[-1\,;1]$.

Problème 318

Dans le plan on définit un triangle ABC non isocèle en A et dont les angles en B et en C sont aigus. On note a son aire.

On appelle H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC et l'on se place dans le cas où $CH > BH$.

On se propose de démontrer qu'il existe une droite et une seule perpendiculaire au côté [BC], en un point M, qui partage le triangle ABC en deux polygones de même aire.

Problème 319

On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble des points défini par

$$C=\{M\,(x\,;y)/\,x>0\,,\,y>0\ et\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1\}$$

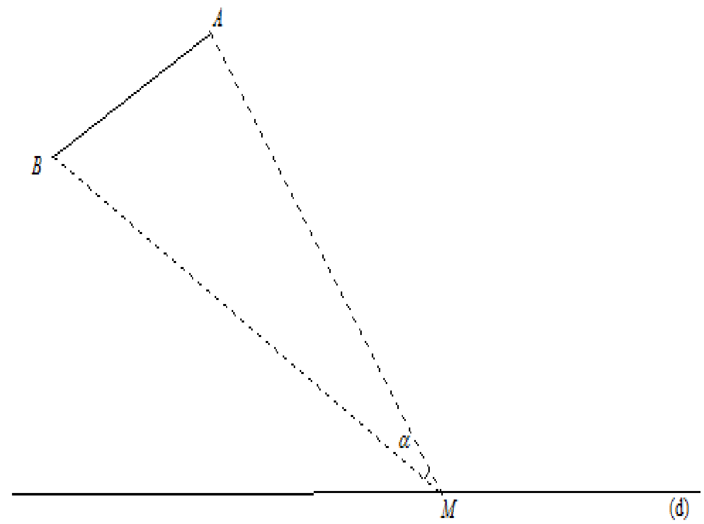
C est-il un quart de cercle ?

Problème 320

En se promenant sur une route rectiligne on observe un segment AB sous un angle α.

Cet angle varie suivant la position du point M.

On choisit un repère orthonormé où l'axe horizontal est la droite (d), B est sur l'axe vertical par exemple à l'affixe i et A à l'affixe $a+ib$. Un point quelconque du plan aura pour affixe $z=x+iy$.



Problème 321

Cet exercice n'est pas particulièrement destiné à être résolu… Si vous y arrivez tant mieux, mais ce qui compte c'est de montrer ce que vous pouvez faire : **toute trace écrite** sera prise en compte du moment qu'elle est cohérente. En tous cas n'y passez pas plus de 20-25 minutes.

On considère un trapèze $ABCD$ tel que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DCB}$ aient la même mesure α.

Déterminer les valeurs de α pour que le trapèze $ABCD$ ait une aire maximale sachant que les côtés AB, BC et CD mesurent un mètre.

Problème 322 (source – IREM Nantes – Stéphane Faes)

ABCD est un quadrilatère quelconque dont les côtés sont divisés en 3. Se sont formés ainsi 8 points E, F, G, H, I, J, K et L tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ...etc

(LG) coupe (EJ) en M et (FI) en N

(KH coupe (EJ) en P et (FI) en O

Que peut-on dire de l'aire de MNOP par rapport à celle de ABCD ?

***commentaires** : Y'a-t-il une solution niveau lycée ?* [*conjecture geogébra*]

- **enseignement de spécialité**

  - **arithmétique**

Problème 323

Proposer une méthode et l'appliquer pour déterminer sans l'aide d'une calculatrice les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de 97^{1996}

Problème 324

Un nombre *N* s'écrit $n = a_1^{n_2} a_2^{n_2} ....$ où les a_i sont des nombres premiers.

1. Quel est le nombre de diviseurs de *N* ?

2. Donner une expression de la somme *S* des diviseurs de *N*.

Problème 325

Préliminaire : on se réfère dans ce sujet à un langage de programmation capable de traiter des nombres entiers et des caractères, ce qui est le cas de la plupart des langages y compris ceux que fournissent certaines calculatrices programmables.

En informatique, le code ASCII consiste à associer à chaque caractère un code numérique qui est un entier compris entre 0 et 255. Ainsi, le code de @ vaut 64, celui de A est 65, etc.

Questions de syntaxe : dans la plupart des langages de programmation il existe une fonction appelée **chr**() ou **char**() ou **car**() (par exemple avec Calc) et qui renvoie un caractère à partir de son code ASCII. On entre donc par exemple chr(65) pour obtenir la lettre A. La fonction réciproque est souvent nommée asc() ou ord(), de sorte qu'on tape ord("A") ou asc('A') (selon le langage) pour obtenir le nombre 65.

Pour simplifier ce qui suit, nous conviendrons de nous limiter à un sous-alphabet formé des lettres majuscules de A à Z et du caractère @ pour marquer les espaces. Dans ces conditions, la formule ord(c) – 64 renvoie un nombre compris entre 0 et 26 si la variable c contient une lettre de notre mini-alphabet.

Codage.

En utilisant le codage décrit ci-dessus, coder le message suivant : BONJOUR@A@TOUS

On définira un tableau pour ranger les lettres et un autre pour le codage du message.

On va crypter (chiffrer) le message au moyen de la fonction C qui, à tout n entier appartenant à [0 ; 26] associe le reste $C(n)$ de la division de $13n$ par 27.
Adapter la procédure réalisée en 1. a. pour obtenir les restes $C(n)$ correspondant à chaque code n, puis en déduire la lettre correspondante.
Décodage.

Notons D la fonction qui, à tout entier k appartenant à [0 ; 27], associe le reste de la division de $25k$ par 27.

À partir des nombres cryptés trouvés précédemment, retrouver le message originel en utilisant la fonction D.

Problème 326

Pour tout entier naturel n non nul, on considère le nombre U_n défini par :

$$U_n = 1 + 3 + 3^2 + \ldots \cdot + 3^n.$$

On cherche à déterminer si ce nombre peut être divisible par l'un ou plusieurs des nombres premiers suivants : 2 ; 3 ; 7 et 13.

Problème 327

On dit qu'un entier naturel non nul N est en division harmonique si le quotient du nombre de diviseurs de N par la somme des inverses des diviseurs de N est un entier (c'est-à-dire que le nombre des diviseurs est un multiple de la somme des inverses des diviseurs).

Par exemple :

* 6 admet 4 diviseurs qui sont 1, 2, 3 et 6 ;

* la somme des inverses des diviseurs de 6 vaut : 1+1/2+1/3+1/6=2 : le quotient $\frac{4}{2}=2$ est un entier, 6 est donc en division harmonique

Pour tout entier n non nul on pose $q_n = 2^{n+1} - 1$ et $a_n = 2^n q_n$

les nombre a_n sont-ils en divisions harmoniques ?

Problème 328

Le but de cet exercice est d'étudier les restes modulo p (p entier strictement supérieur à 1) des suites (u_n) définies par : $u_n = an + b$, a et b étant deux entiers naturels donnés.

Problème 329

Pour tout entier naturel non nul n on considère les deux nombres entiers $N = 3n^2 - n + 1$ et $D = 2n - 1$.

Le but de l'exercice consiste à déterminer, suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de N par D.

Problème 330

Le but du problème est de déterminer tous les entiers naturels n vérifiant la propriété P :

« $n^2 + 11$ est divisible par $n + 11$ ».

Problème 331

Le but de cet exercice est le cryptage et décryptage d'un message utilisant le « chiffrement à clef secrète ». On utilisera le codage informatique des lettres avec le code ASCII. Le message choisi est une citation de Mignon McLaughlin (journaliste et écrivain américaine, 1913-1983).

I- Expérimentation

Préliminaire : En informatique, le code ASCII consiste à associer à chaque caractère (lettre de l'alphabet, chiffre, signe de ponctuation, ...) un code numérique que l'on appelle son code ASCII.

Par exemple, le code de A est 65, celui de B est 66, celui de a est 97, celui de l'espace est 32... Le code utilisé est un entier n tel que $0 \leqslant n \leqslant 255$.

Syntaxe : Dans la plupart des tableurs, la fonction «code» renvoie le code ASCII. La fonction réciproque est notée « CAR ». On entre « = CODE(''A'') » pour obtenir le nombre 65 et on entre « =CAR(65) » pour obtenir la lettre A.

1. Cryptage

a. En utilisant le code ASCII, coder le message suivant :

Dans l'arithmétique de l'amour, un plus un égal...

Dans la zone de saisie du message, on ne mettra qu'une seule lettre par cellule et on n'oubliera pas de taper un espace pour séparer les mots. La zone de saisie du message est la ligne 1 à partir de la cellule B1. Le message codé avec le code ASCII apparaitra sur la ligne 2 à partir de la cellule B2.

b. Le code ASCII ne constituant pas un codage bien secret, la ligne 3 consiste à crypter le code ASCII en utilisant le cryptage suivant :

On note C la fonction de cryptage qui, à tout n entier appartenant à [0; 255] associe le reste de la division de $7n$ par 256. Soit $C(n)$ ce reste.

Compléter le tableau réalisé en 1. a., en y ajoutant à la ligne 3, les restes $C(n)$ correspondant à chaque code n de la ligne 2.

Le tableau ci-dessous donne le début de la phrase et du codage à obtenir :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	
1	message	*D*	*a*	*n*	*s*		*l*		*a*	*r*	*i*	*t*	*h*	*m*	
2	codage ASCII	68	97	110	115	32	108	32	97	114	105	116	104	109	
3	message codé	220	167	2	37	224	244	224	167	30	223	44	216	251	

Décryptage à l'aide de la clef secrète

La fin de la citation de Mignon McLaughlin est cryptée par :

244 224 223 2 202 223 2 223 224 195 44 224 188 195 51 72 224 251 9 223 2 37 224 51 2 224 95 209 167 244 224 86 95 30 9

Pour décrypter la fin de cette citation, on note D la fonction de décryptage qui, à tout entier k appartenant à [0 ; 255], associe le reste de la division de $183k$ par 256.

Entrer en ligne les nombres cryptés ci-dessus, puis sur une nouvelle ligne, utiliser la fonction D pour lire la fin de la citation de Mignon McLaughlin

Problème 332

Pour tout entier naturel n, on définit deux entiers a et b en posant : $a = 4n + 1$ et $b = 5n + 3$.

On s'intéresse aux valeurs du PGCD de a et de b en fonction de n.

Problème 333

A tout n entier naturel ($n > 1$), on applique l'algorithme suivant : si $n = 1$ le processus s'arrête, sinon :

– si n est pair, on le transforme en $\frac{n}{2}$,

– si n est impair, on le transforme en $3n + 1$.

On note à nouveau n le résultat obtenu et on ré-applique l'algorithme à ce n. Lorsque, pour l'entier n, l'algorithme aboutit à 1, on appelle « suite de Syracuse associée à n » la suite (finie) des entiers rencontrés pour passer de n à 1.

On note $L(n)$ le nombre d'entiers de cette suite finie. $L(n)$ est la longueur de la suite de Syracuse associée à n.

Exemple : pour $n = 5$ on obtient successivement les nombres $5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1$ et donc $L(5) = 6$.

a. Quelle est la longueur des suites de Syracuse associées aux nombres de la forme 2^p pour p entier naturel non nul ?

b. Que remarque-t-on quant aux suites de Syracuse associées aux nombres de la forme $8k + 4$ et $8k + 5$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

c. Démontrer que si le reste de la division euclidienne de n par 4 est 0, 1 ou 2 alors l'algorithme amène nécessairement, au bout d'un certain nombre d'étapes, à un entier strictement inférieur à n.

La conjecture de Syracuse affirme que pour tout entier non nul n le processus aboutit à 1.

La longueur de la suite quant à elle n'est pas, à l'heure actuelle prévisible, en toute généralité.

Problème 334

Le but de l'activité est de déterminer si les nombres de la forme $a^4 - 1$ et $a^4 + 4$ peuvent être premiers, a étant un entier **supérieur ou égal à 2**.

Problème 335 (source IREM Lyon, la feuille @ problème)

Distribution de bonbons (libérale avancée)

n enfants sont placés en cercle. On distribue des bonbons en tournant toujours dans le même sens sur le cercle, de la façon suivante :
On donne un bonbon à un enfant, on passe le suivant, on donne un bonbon au troisième, on passe les deux suivants, on donne un bonbon au sixième enfant, et ainsi de suite ... (Quand on a donné le $k^{\text{ème}}$ bonbon, on passe k enfants).

Pour quelles valeurs de n les enfants auront-ils tous au moins un bonbon ?

conjectures originale géogebra : fichier 1 fichier 2 (N. Cosme, lycée franco mexicano DF, stage St Domingue)

Problème 336 *le jeu de la vie*

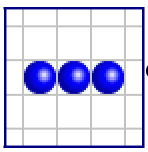
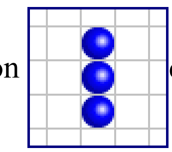
wikipédia :

En préambule, il faut préciser que le jeu de la vie n'est pas vraiment un jeu au sens ludique, puisqu'il ne nécessite aucun joueur ; il s'agit d'un automate cellulaire, un modèle où chaque état conduit mécaniquement à l'état suivant à partir de règles pré-établies.

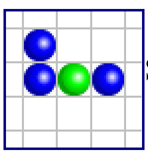
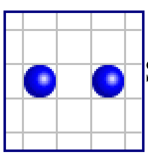
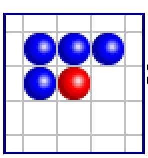
Le jeu se déroule sur une grille à deux dimensions, théoriquement infinie (mais de longueur et de largeur finies et plus ou moins grandes dans la pratique), dont les cases — qu'on appelle des « cellules », par analogie avec les cellules vivantes — peuvent prendre deux états distincts : « vivantes » ou « mortes ».

À chaque étape, l'évolution d'une cellule est entièrement déterminée par l'état de ses huit voisines de la façon suivante :

- Une cellule morte possédant exactement trois voisines vivantes devient vivante (elle naît).
- Une cellule vivante possédant deux ou trois voisines vivantes le reste, sinon elle meurt.

Ainsi, la configuration  donne au tour suivant la configuration  qui redonne ensuite la première.

On peut également formuler cette évolution ainsi :

-  Si une cellule a exactement trois voisines vivantes, elle est vivante à l'étape suivante. C'est le cas de la cellule verte dans la configuration de gauche.
-  Si une cellule a exactement deux voisines vivantes, elle reste dans son état actuel à l'étape suivante. Dans le cas de la configuration de gauche, la cellule située entre les deux cellules vivantes reste morte à l'étape suivante.
-  Si une cellule a strictement moins de deux ou strictement plus de trois voisines vivantes, elle est morte à l'étape suivante. C'est le cas de la cellule rouge dans la configuration de gauche.

exercice : avec un tableur, simuler 50 générations dans un cadre de 5 cellules sur 5.

simulation internet et exemple de solution *(Lycée Alexandre Dumas de Port-au-Prince, stage St Domingue)*

- **similitudes**

Problème 337

Dans le plan, on considère deux segments [AC] et [BD] tels que $AC = BD$ et $\left(\overrightarrow{AC}\ ;\overrightarrow{BD}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

On désigne par M le milieu de [AC] et par N celui de [BD]. On appelle (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4) les cercles de diamètres respectifs [AB], [BC] , [CD] et [DA].

On construira la figure au fur et à mesure des besoins.

1. a. Soit r la rotation qui transforme A en B et C en D. Quel est l'angle de r ? et quel est son centre ?

b. Soit r' la rotation qui transforme A en D et C en B. Quel est l'angle de r' ? et quel est son centre ?

c. Quelle est la nature du quadrilatère $INJM$?

On désigne par P et R les points diamétralement opposés à I sur, respectivement, (C_1) et (C_3) et par Q et S les points diamétralement opposés à J sur, respectivement, (C_2) et (C_4).

2. Soit s la composée de l'homothétie de centre I, de rapport $\sqrt{2}$et de la rotation r de même centre et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Que peut-on dire de J ?

Problème 338

On considère un triangle ABC direct de centre de gravité O.

On construit les triangles équilatéraux CBA', ACB' et BAC' tels que les angles ($\overrightarrow{A'C}$; $\overrightarrow{A'B}$),($\overrightarrow{B'A}$; $\overrightarrow{B'C}$) ,($\overrightarrow{C'B}$; $\overrightarrow{C'A}$) aient pour mesure $\frac{\pi}{3}$. On désigne par F, G et H les centres des triangles équilatéraux.

Quelle semble être la nature du triangle FGH ?

Problème 339

Dans le plan complexe orienté, on considère un triangle $OO'A$ de sens direct, rectangle en O. On considère M un point du cercle C de centre O et passant par A. On désigne par S la similitude directe de centre A qui transforme O en O' et on désigne par M' le point image de M par la similitude S. On cherche à prouver que la droite (MM') passe par un point fixe.

Problème 340

Soit un triangle équilatéral direct ABC et soit D un point du segment [BC].

La parallèle à la droite (AC) menée par D coupe la droite (AB) en E et la parallèle à la droite (AB) menée par D coupe la droite (AC) en F. Soit le point G, centre de gravité du triangle ABC et les points H et A', symétriques de G et A par rapport à la droite (BC).

On définit les points I et J centres de gravité respectifs des triangles BDE et CDF.

On se propose d'étudier la nature du triangle HIJ quand D décrit le segment [BC].

Problème 341

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ direct qui permet une assimilation à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit le nombre complexe $f(z)=\frac{1}{2}(1+i)z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

On pose $a_0=4+2i$ et, pour tout n entier, $a_{n+1}=f(a_n)$. On note A_n le point d'affixe a_n dans le repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

Observons le nuages des points A_n

Problème 342

On considère le carré direct *ABCD* du plan orienté tel que $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}$. On appelle *O* le centre du carré. Un point *M* décrit le segment [*DC*]. La perpendiculaire à la droite (*AM*) passant par *A* coupe (*BC*) en *N*. On appelle *I* le milieu de [*MN*]. On se propose de déterminer le lieu des points *I* lorsque *M* décrit le segment [*DC*].

Problème 343

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle isocèle *ABB*' tel que : $(\overrightarrow{BB'}\,;\overrightarrow{BA})=\frac{\pi}{2}$.

Soit *M* un point variable de la droite (*BB*') et *M*' l'image de *A* dans la rotation de centre *M* et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On note *I* le milieu de [*BB*'] et *J* le milieu de [*MM*'].

On cherche à déterminer le lieu du point *J* lorsque *M* décrit la droite (*BB*').

Problème 344

On considère un triangle équilatéral direct $O_1O_2O_3$, le milieu *O* du segment $[O_1O_2]$ et le cercle C de centre O_1 passant par *O*. On note *A* un point du cercle C distinct du point *O*.

Pour tout point *M* du cercle C, on note M_1 le point symétrique de *M* par rapport à *O* puis *M*' le point tel que le triangle MM_1M' soit équilatéral direct.

On s'intéresse au lieu que semble décrire le point *M*' lorsque le point *M* décrit le cercle C .

Lorsque les points *M* et *A* sont distincts, les droites (*AM*) et (*A*'*M*') se coupent en un point *P*. Quel est le lieu décrit par le point P lorsque le point M décrit le cercle C privé du point A.

Problème 345

Dans le plan, on considère un triangle OAB rectangle en O, de sens direct, et une droite (d) passant par O.

On note *A'* le projeté orthogonal de *A* sur (d), *B'* le projeté orthogonal de *B* sur (d) et (C) le cercle de diamètre [*A'B'*]. Enfin *I* est le pied de la hauteur issue de *O* dans *OAB*.

On s'intéresse aux différents cercles (C) lorsque la droite (d) tourne autour de O

source pour ce niveau : épreuve pratique 2007 épreuve pratique 2008 site Frédéric Laroche ...et autres

b) Économique et sociale

- **analyse**

Problème 346

On considère les fonctions *f* et *g* définies et dérivables pour tout nombre réel *x* de l'intervalle]0 ; 8] par $f(x)=\frac{x^2}{3}+1$ et $g(x)=\frac{x^3}{27}-\frac{4x^2}{9}-x+18$

Les fonctions *f* et *g* modélisent respectivement l'offre et la demande d'un produit :

- $f(x)$ est la quantité, exprimée en milliers d'articles, que les producteurs sont prêts à vendre au prix unitaire de *x* centaines d'euros;
- $g(x)$ la quantité, exprimée en milliers d'articles, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix unitaire de *x* centaines d'euros.

On appelle prix unitaire d'équilibre du marché la valeur de *x* pour laquelle l'offre est égale à la demande.

Quel nombre d'articles,(*arrondi à la centaine d'articles près*), correspond à ce prix unitaire d'équilibre ?

Problème 347

La population mondiale est passée à 6,9 milliards en 2010. Avec un taux de croissance annuel de 1,14% , en quelle année la population mondiale dépassera-t-elle 9 milliards ?

Problème 348

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0;+∞[par $f(x)=2\ln x-\frac{x}{2}$

Une entreprise produit sur commande un article. La production quotidienne peut varier de 10 à 100 articles. Le bénéfice réalisé par cette production est modélisé par la fonction f de la façon suivante :
$f(x)$ est le montant, exprimé en milliers d'euros, du bénéfice réalisé par l'entreprise pour une production de x dizaines d'articles.

1. Combien d'articles l'entreprise doit-elle produire par jour pour réaliser un bénéfice maximum ? Préciser alors ce bénéfice à l'euro près.
2. Combien d'articles l'entreprise doit-elle produire par jour pour ne pas travailler à perte ?

Problème 349

Soit C la fonction définie pour tout x élément de l'intervalle 016 par : $C(x) = 0{,}5\,x^3 - 12\,x^2 + 114\,x + 100$.

La fonction C modélise le coût total de production, exprimé en euro, de x centaines d'articles fabriqués par jour.

La recette totale en euros pour x centaines d'articles est donnée, en admettant que toute la production soit vendue, par $R(x) = 100\,x - 3\,x^2$

Quelle est la production x_0 (arrondie à l'article près) pour laquelle le bénéfice est maximal ?

Quel est ce bénéfice maximal arrondi à l'euro près ?

Problème 350

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{2\,x}{x^2+1}$ et la primitive F de la fonction f telle que $F(3) = 1{,}2\cdot$

Une entreprise fabrique x milliers d'articles par jour (0<x≤5).

Le prix de revient moyen d'un article, exprimé en euros, dépend du nombre d'articles produits et est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle [0;5] par $C(x) = \dfrac{F(x)}{0{,}5\,x}$

Le tableau donnant le signe de la dérivée C′ de la fonction C est :

x	0		3		5
$C'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Calculer le prix de revient moyen minimal d'un article. Quel est alors le montant en euros du coût total de production ?

Problème 351

Une entreprise produit q milliers de pièces par jour, q étant un réel de 05.

Le prix de revient d'une pièce, exprimé en euros, dépend de q et est donné par l'expression :

$$f(q) = \frac{q^3 + 6\,q^2 + 12\,q + 108}{12\,q}$$

Quel est le nombre d'unités à fabriquer pour que le prix de revient d'une pièce soit minimal. Quel est alors le montant en euros du coût total de production ?

- **statistiques**

Problème 352

Le tableau suivant donne le montant (en milliards d'euros) de la dépense des ménages entre les années 2000 et 2009 dans le secteur « biens de consommation » :

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2008	2009
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Montant y_i	129,0	133,3	138,6	143,7	149,5	155,4	162,8	171,3	173,8

(Source INSEE)

En utilisant un ajustement, donner une estimation du montant (en milliards d'euros) de la dépense des ménages dans le secteur « biens de consommation » que l'on peut prévoir pour 2010 (*le résultat sera arrondi au dixième*).

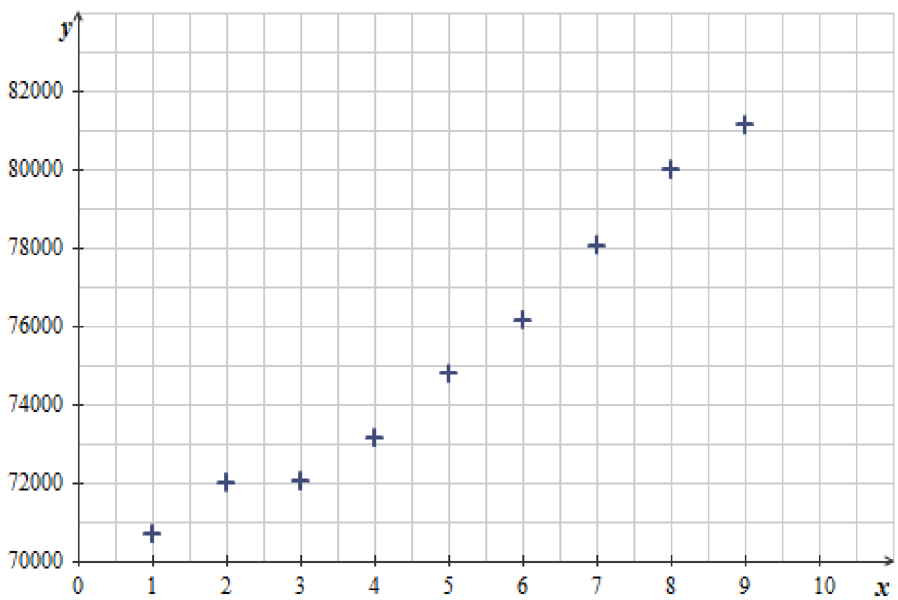
Problème 353

Le tableau suivant donne l'évolution des effectifs d'étudiants en CPGE entre les années 2001-2002 et 2009-2010 :

Année	2001 2002	2002 2003	2003 2004	2004 2005	2005 2006	2006 2007	2007 2008	2008 2009	2009 2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectifs y_i	70 703	72 015	72 053	73 147	74 490	76 160	78 072	80 003	81 135

Source DEPP.

On donne ci-dessous, le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;\,y_i)$.



En supposant qu'un ajustement affine reste valable pour les deux années suivantes, donner une estimation du pourcentage

d'évolution du nombre d'étudiants inscrits en CPGE en 2011-2012 par rapport à 2009-2010.

Problème 354 Insécurité routière

Cette activité (pas vraiment du niveau de Seconde mais instructive) consiste en l'illustration de données statistiques à l'aide d'un tableur, puis à leur interprétation, dans un contexte «citoyen».

Le tableau ci-dessous fournit, pour la France, la vitesse moyenne des véhicules légers, ainsi que le nombre de morts sur les routes, de 1998 à 2006.

Année	Vitesse moyenne des véhicules légers (km/h)	Nombre de morts
1998	88,7	8 437
1999	88,6	8 029
2000	90,1	7 643
2001	89,4	7 720
2002	89,2	7 242
2003	86,8	5 731
2004	84,5	5 593
2005	82,9	5 318
2006	82	4 703

(Source www.securiteroutiere.gouv.fr).

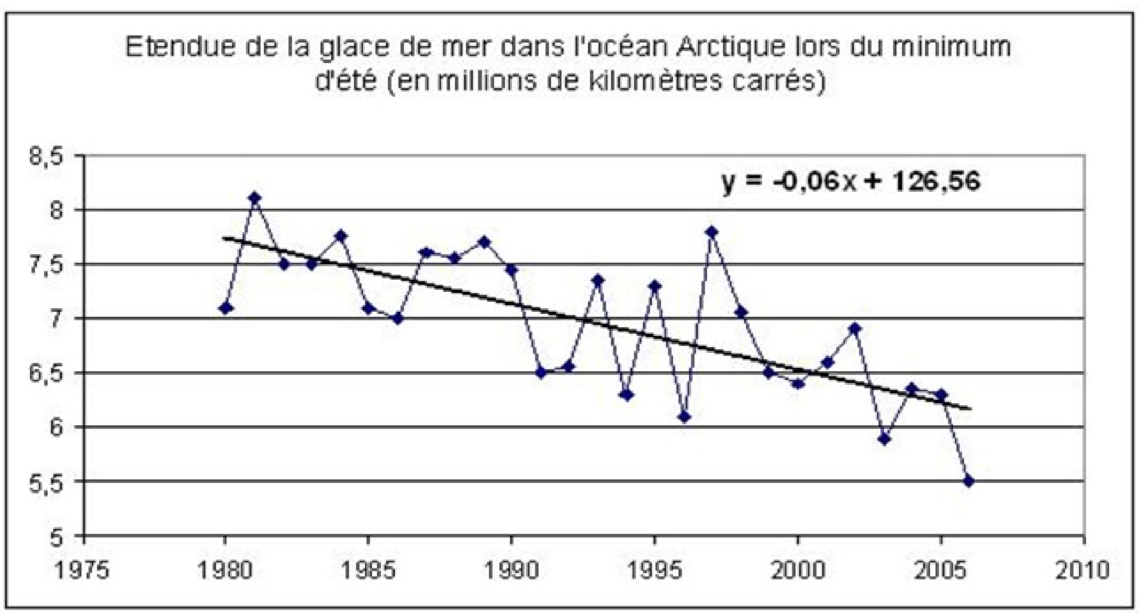
3 ajustements affines permettent de montrer le lien entre la vitesse sur la route et le nombre de morts.

Problème 355 Glace en Arctique et température globale de la Terre

Source : Nations Unies – GIEC (Groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat – IPCC en anglais) rapport 2007 – http://www.ipcc.ch/

1.Étendue de la glace de mer dans l'océan Arctique

Le graphique suivant donne l'étendue minimale, en millions de km^2, de la glace de mer dans l'océan Arctique, mesurée chaque été de 1980 à 2006.



L'ajustement affine des observations permet de matérialiser la tendance et « d'extrapoler ».

La droite obtenue à l'aide du tableur-grapheur a pour équation $y = -0{,}06\,x + 126{,}56$ où x est l'année et y l'étendue de glace de mer en millions de km^2 calculée avec cette valeur de x.

Les questions suivantes peuvent se poser :

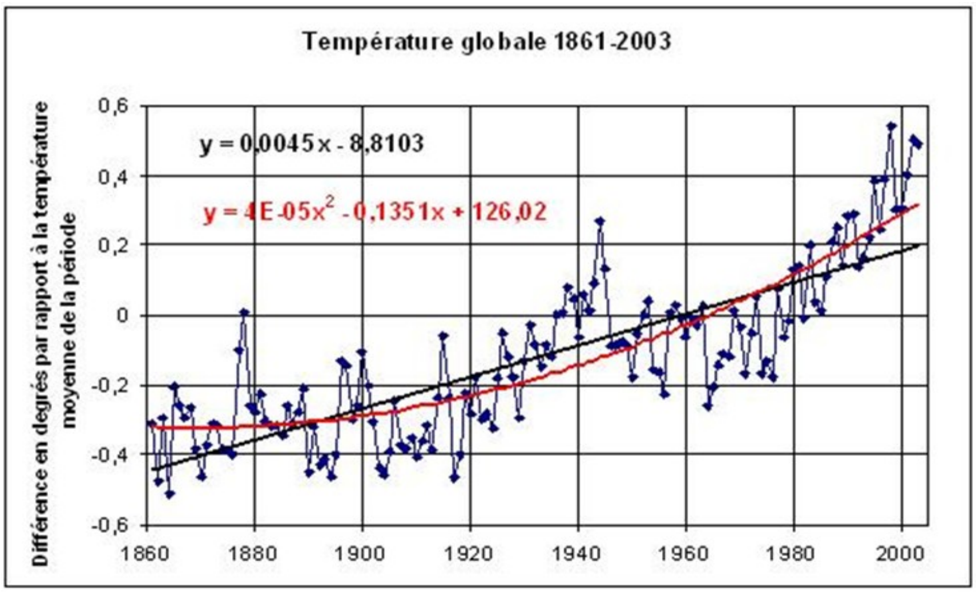
– est-il vrai que « la tendance est à une perte de 60 000 km^2 par an » ?

– si la tendance observée se maintient, quelle serait l'étendue minimale de la glace de mer en Arctique durant l'été 2050 ?

– si la tendance observée se maintient, en quelle année n'y aurait-il plus de glace de mer en Arctique en été ?

2. Température globale à la surface de la Terre

Les données ci-dessous fournissent pour la période 1861-2003 les écarts à la moyenne, de la température globale à la surface de la Terre. La valeur 0 correspond à la moyenne sur la période 1861-2003. Par exemple, en 1900, la température moyenne à la surface de la Terre est de – 0,1067° C en-dessous de la moyenne de la période.



Avec un tableur-grapheur, ces données peuvent être ajustée avec deux modèles mathématiques différents :

– Modèle 1 : la droite d'équation $y = 0{,}0045\,x - 8{,}8103$;

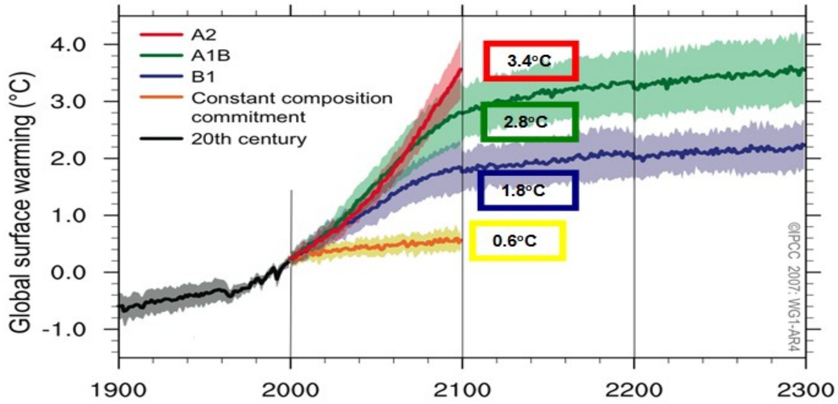
– Modèle 2 : la parabole d'équation $y = 4.10^{-5}\,x^2 - 0{,}1351\,x + 126{,}02$.

Chacun de ces modèles peut être utilisé pour estimer, en 2100, l'écart en degrés de la température de la Terre par rapport à la moyenne de 1861 à 2003 si la tendance observée se poursuit.

– Modèle 1 : + 0,639 7°.

– Modèle 2 : + 18,71°.

Il convient cependant de « relativiser » le caractère prédictif de ces simples calculs, en effectuant par exemple une recherche sur les modélisations utilisées par les chercheurs du GIEC. Les modèles précédents sont plutôt rudimentaires (et le modèle 2 assez inquiétant), le GIEC a mis au point plusieurs modèles, tenant compte, en particulier, des évolutions possibles des concentrations de gaz à effet de serre dans l'atmosphère.



Ces modèles prévoient que le réchauffement continuera si les concentrations de gaz à effet de serre augmentent.

Si les concentrations étaient maintenues au niveau actuel, un réchauffement inexorable de 0,6°C se produirait d'ici à 2100. Un réchauffement plus large se produirait pour les concentrations plus élevées (autres modèles).

Commentaire

Cette étude permet de montrer des ajustements autres qu'affine et ne doit pas faire l'objet de développements théoriques pour d'autres modèles d'ajustements.

Problème 356

Le tableau ci-dessous donne le montant en milliards d'euros de l'encours des crédits aux ménages (encours en fin d'année).

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Montant de l'encours des crédits y_i	482,5	508,9	541,8	580,5	639,5	712,9	792,7	877,1	940,1

Source INSEE.

En admettant qu'un ajustement affine est justifié et valable pour les années suivantes, calculer le montant en milliards d'euros de l'encours des crédits aux ménages en 2010.
On a constaté que le montant de l'encours des crédits aux ménages a augmenté en moyenne de 5,6 % par an entre 2008 et 2010.
Avec ce deuxième modèle, calculer le montant de l'encours des crédits aux ménages en 2010 (valeur arr au dixième).
Pour chacun des modèles précédents, déterminer à partir de quelle année le montant de l'encours des crédits aux ménages dépassera 1 200 milliards d'euros.

Problème 357

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'Indice du PIB par habitant en Turquie, (base pays membres de l'OCDE 100 en 2000) :

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
PIB y_i	35,8	33,2	34,8	36	38,8	41,9	44,2	45,6

Source : OCDE

Calculer le pourcentage d'augmentation de l'indice du PIB par habitant entre 2000 et 2007.
À l'aide d'un ajustement bien choisit, déterminer l'année à partir de laquelle, l'indice du PIB par habitant en Turquie sera supérieur à 100.

• Probabilité

Problème 358

Lors d'une étude de marché, la société PAPEX a étudié la répartition de ses clients selon deux critères, leur besoin en papier et leur possibilité de financement :

35% de ses clients utilisent moins de 12 tonnes de papier par an et, parmi ceux-ci, 80% sont solvables.

40% de ses clients utilisent de 12 à 20 tonnes de papier par an et, parmi ceux-ci, 85% sont solvables.

pour le reste de ses clients, seuls 10% ne sont pas solvables.

La société établit un échantillon de 20 de ses clients choisis au hasard.
Quelle est la probabilité d'avoir au moins 4 clients solvables parmi ces 20 clients ? Combien de clients solvables la société peut espérer avoir avec cet échantillon?

Problème 359

Le tableau ci-dessous donne l'origine scolaire des étudiants entrant en première année de CPGE en 2009-2010 en pourcentage ainsi que les effectifs des nouveaux entrants en première année de CPGE en 2009-2010 :

	Origine des étudiants en %				Nouveaux entrants
	Term. S	Term. ES	Term. L	Autres	
Filière scientifique	95,2	0	0	4,8	23806
Filière économique et commerciale	47,3	42,2	0,7	9,8	10003
Filière littéraire	23	21,3	54,9	0,8	6654

Le dossier choisi est celui d'un étudiant dont l'origine scolaire est la terminale ES.
Calculer la probabilité que ce soit le dossier d'un étudiant de la filière économique et commerciale.

Problème 360

Les deux tableaux ci-dessous sont extraits d'une étude de la DEPP sur le devenir un an après des entrants en 1re année de 1er cycle universitaire en Droit, Sciences Économiques et AES.

TABLEAU 1 : Répartition, par discipline, des entrants à l'université à la rentrée 2008

Disciplines	Effectifs
Droit	34650
Sciences Économiques (hors AES)	17650
AES	9450
Total	61750

TABLEAU 2 : Devenir, à la rentrée universitaire de 2009, des entrants de 2008 (en %)

	Poursuite dans la même discipline	Réorientation vers une autre filière universitaire	Non réinscription à l'université	Total
Droit	68,3	9,2	22,5	100
Sciences Économiques (hors AES)	59,3	10,3	30,4	100
AES	50,5	14,2	35,3	100

On choisit de manière aléatoire un étudiant parmi les nouveaux entrants de la rentée 2008 dans ces trois disciplines
L'étudiant choisi ne s'est pas réinscrit à l'université à la rentrée 2009. Quelle est la probabilité qu'il ait été inscrit en 2008 en Sciences Économiques ?

Problème 361

Dans cet exercice, les résultats seront éventuellement arrondis à 10^{-3} près.

Une étude sur la fréquentation d'une salle de spectacle a permis d'établir les résultats suivants :

– 60 % des spectateurs possèdent un abonnement ;

– parmi les spectateurs ne possédant pas d'abonnement, 75 % ont été influencé par une critique ;

– 24 % des spectateurs, possèdent un abonnement et ont été influencé par une critique.

à la sortie d'un spectacle, on choisit un spectateur au hasard et on note :

– A l'évènement : « le spectateur possède un abonnement » ;

– C l'évènement : « le spectateur a été influencé par une critique ».

Le spectateur choisi n'a pas été influencé par une critique, quelle est la probabilité que ce soit un spectateur possédant un abonnement ?

On choisit successivement au hasard et de manière indépendante trois spectateurs. Quelle est la probabilité qu'il y en ait au plus deux ayant un abonnement ?

Problème 362

À l'occasion d'une kermesse, l'organisateur d'une loterie, dispose d'une part d'un sac contenant un jeton rouge et neuf jetons blancs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.
Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

* si le jeton est rouge, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne un nombre pair ;
* si le jeton est blanc, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.
Chaque joueur paie 1,20 € par partie. Si le joueur gagne la partie, il reçoit un bon d'achat d'une valeur de 5 €, s'il perd la partie, il ne reçoit rien.
Proposer, en expliquant votre démarche, une estimation du montant en euros, du bénéfice que peut espérer obtenir l'organisateur si 300 parties ont été jouées.

Problème 363

Dans un club de sport, Julien joue au basket. Il sait que lors d'un lancer sa probabilité de marquer un panier est égale à 0,6.
Combien de fois Julien doit-il lancer le ballon au minimum pour que la probabilité qu'il marque au moins un panier soit supérieure à 0,999 ?

source pour ce niveau : site de A Yallouz

- **enseignement de spécialité**

Problème 364

Un industriel décide de mettre sur le marché un nouveau produit. Afin de promouvoir celui-ci, il souhaite lancer une campagne hebdomadaire de publicité.
Avant le lancement de cette campagne, on contrôle l'impact de cette campagne auprès d'un panel de consommateurs.
On trouve ceux qui ont une opinion favorable (F), ceux qui sont neutres (N) et ceux qui ont une opinion négative (R). On a constaté que d'une semaine sur l'autre :

* 28 % des consommateurs ayant un avis favorable adoptent une position neutre et 10 % une opinion négative ;
* Parmi les consommateurs ayant une opinion neutre, 32% émettent un avis favorable et 10% un avis négatif ;
* 70 % des consommateurs ayant un avis négatif ne changent pas d'opinion et 16% adoptent un avis favorable.

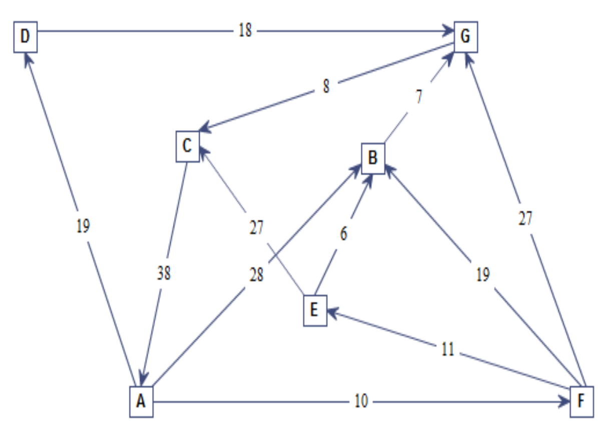
Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets F, N et R
On note M la matrice de transition associée à ce graphe.
L'industriel décide de lancer la campagne publicitaire.
Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$, où a_n désigne la probabilité qu'un consommateur touché par la campagne soit favorable au produit la semaine n, b_n la probabilité que ce consommateur soit neutre la semaine n et c_n la probabilité que ce consommateur ait une opinion négative de ce produit la semaine n.
La semaine du début de la campagne est notée semaine 0. On a $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Soit $P = \begin{pmatrix} a & b & 0{,}25 \end{pmatrix}$, la matrice ligne de l'état probabiliste stable du système. Déterminer a et b.
#En ne prenant en compte que les opinions favorables, combien de semaines devrait durer la campagne publicitaire ?

Problème 365

Le graphe pondéré ci-dessous, donne en minutes, les durées moyennes des parcours de A à C en tenant compte des sens uniques.

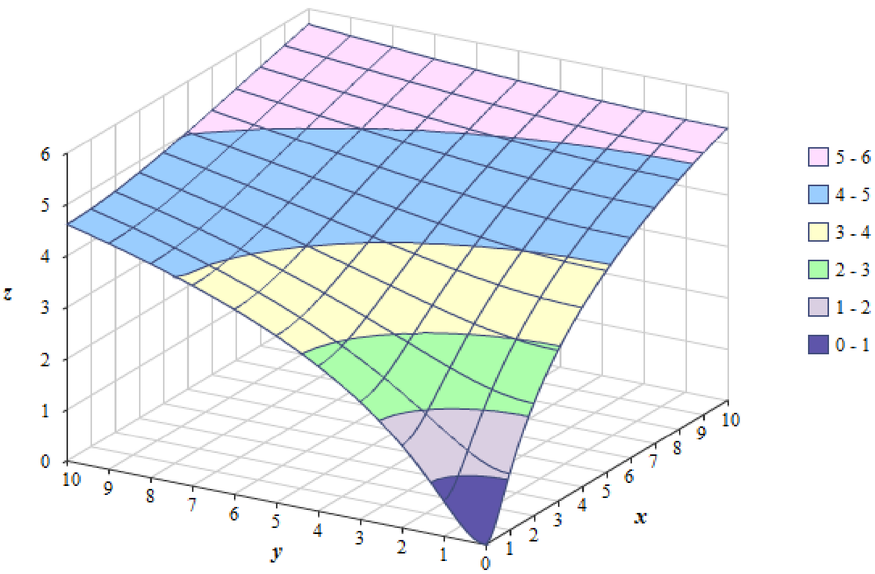
Un automobiliste doit se rendre de A à C. En utilisant un algorithme, déterminer le trajet le plus rapide pour aller de A à C.

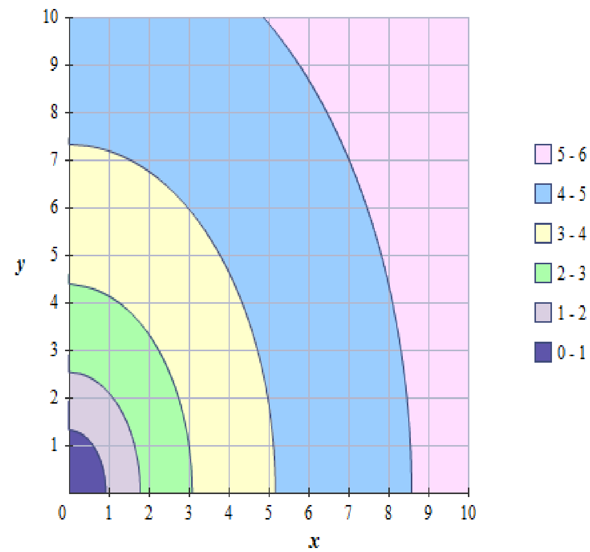
Le retour sera-t-il plus rapide que l'aller ?



Problème 366

Une entreprise dispose de deux unités de fabrication A et B pour un même produit. Le coût total de production exprimé en milliers d'euros de cet article pour x milliers d'articles produits dans l'unité A et de y milliers d'articles produits dans l'unité B est donné par $f(x\,;\,y)=\ln(2x^2+y^2+1)$. La figure 1 ci-dessous représente, dans un repère orthogonal, la surface (S) d'équation $z=f(x\,;\,y)$ pour $0\leq x\leq 10$ et $0\leq y\leq 10$.





La demande est de 9000 articles

Quel est le coût total minimal pour une production de 9000 articles ?

Problème 367

Afin d'augmenter sa rentabilité, une entreprise décide d'investir dans deux secteurs notés A et B. Le taux du pourcentage d'augmentation de la rentabilité est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle 06 par :

$$f(x\,;\,y)=\frac{30x+30y}{x^2-2xy+y^2+5}\qquad \text{avec } 0\leq x\leq 6 \text{ et } 0\leq y\leq 6$$

− x est le nombre de milliers d'unités monétaires investies dans le secteur A ;

− y est le nombre de milliers d'unités monétaires investies dans le secteur B ;

− $f(x\,;\,y)=10$, signifie que la rentabilité a augmenté de 10 %.

Quel est le pourcentage maximum d'augmentation de la rentabilité que la direction peut espérer obtenir avec un investissement de 5 milliers d'unités monétaires. Quels sont alors les montants investi le secteur A et dans le secteur B ?

Problème 368

Une salle de spectacle propose un abonnement pour l'année. En 2010, il y avait 300 abonnés. On estime que chaque année, il y a 200 nouveaux abonnés et que d'une année sur l'autre, 75 % des abonnés renouvellent leur abonnement

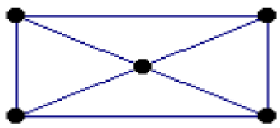
On note u_n le nombre d'abonnés pour l'année 2010 + n

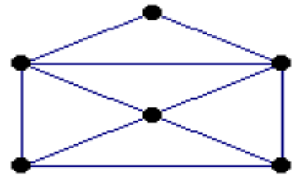
À partir de quelle année, le nombre d'abonnés sera supérieur à 790 ?

Dans ces conditions, est-il possible pour le gérant de la salle de spectacle d'espérer 1 000 abonnés ?

Problème 369 les enveloppes

Peut-on parcourir une fois et une seule les arêtes des graphes ci-dessous sans lever le crayon ?

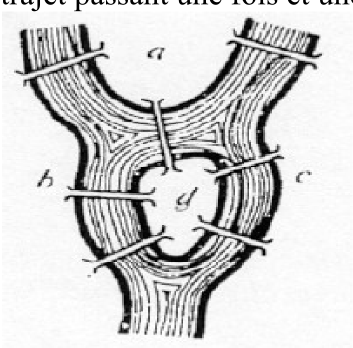


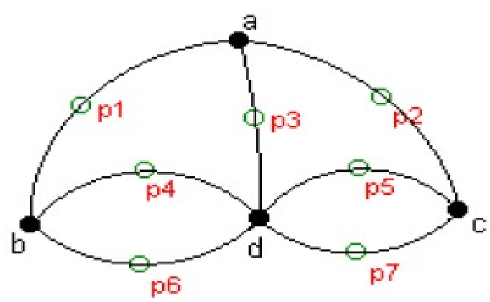


Contenu : introduction des graphes (arêtes, sommets, ordre, sommets adjacents) ; degré d'un sommet ; chaîne eulérienne ; théorème d'Euler

Problème 370 les ponts de Königsberg

Au XVIIIème siècle, les habitants de Königsberg (actuellement Kaliningrad, région de la Russie frontalière de la Pologne et de la Lituanie) aimaient se promener le dimanche. La ville de Königsberg comprenait 7 ponts, disposés selon le schéma ci-dessous. Le souhait des habitants de Königsberg était de faire un trajet passant une fois et une seule par chaque pont. Comment faire ?





Contenu : introduction des graphes (arêtes, sommets, ordre, sommets adjacents) ; degré d'un sommet ; cycle eulérien.

...etc

source :

[eduscol commentaires et 25 problèmes ouverts sur les graphes]

Biblio., source et Autres ressources

- Seconde : logique et raisonnement , algorithmique, exemple progression stat-proba et population de communes
- réforme du lycée   (pour se mettre à jour)   les horaires   le fonctionnement
- brochures n°150 et n°154de l'APMEP :« Pour un enseignement problématisé des Mathématiques au Lycée »
- Denise Grenier - IREM grenoble argumentaire - constat d'un manque chez les étudiants en maths...
- modélisation et mathématiques (power point) le point sur...
- problèmes ouverts au collège   educamer.org
- sources de problèmes IREM Lyon
- entre écran et papier AMPEP revue sesamath, activités au lycée, commentaires de collègues.
- site de A Yallouz
- recherche-formation IREM Toulouse
- site frédéric Laroche
- cahier d'activité pour les secondes de Frédéric Laroche (Ellipses)
- « La pratique du problème ouvert » de Gilbert Arsac et Michel Mante (Repère pour agir - scérén)

Références:

- B.O. (2009) Bulletin officiel n°30 du 23/07/2009. Mathématiques. Classe de seconde.
- B.O. (2006) Bulletin officiel n°29 du 20/07/2006.Socle commun de connaissances et de compétences
- Cabassut Richard (2008) Enseigner la modélisation dans un contexte européen. Bulletin de l'APMEP n°477.
- ICTMA International Community of Teachers of Modelling and Applications. www.ictma.net
- IGEN (2006) L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire. Rapport de l'inspection générale sur l'enseignement des mathématiques n° 2006-034 juin 2006. Ministère de l'éducation. http://media.education.gouv.fr/file/46/0/3460.pdf
- LEMA Learning and Education in and through Modelling and Applications www.lema-project.org
- Eduscol

remerciements:

- **Frédéric Laroche**
- **A Yallouz**

Pour avoir autorisé l'utilisation de leurs documents.